Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Ralf Kurbel
02.05.2011

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb (Fortsetzung von LA IIa/DMA)

Aufgabe 1: (2 Punkte)
Sei V ein komplexer Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$, und ϕ sei eine hermitesche Sesquilinearform auf V. Weiter seien alle Basisvektoren zueinander orthogonal bzgl. ϕ. Beweisen Sie:

$$\phi \text{ positiv definit} \quad \Longleftrightarrow \quad \phi(v_i, v_i) > 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq n$$

Aufgabe 2: (2+2 Punkte)
Sei $A := (a_{ij}) \in M(n \times m, \mathbb{C})$, und es sei $\overline{A} := (\overline{a_{ij}})$. Offensichtlich gilt mit dieser Definition für komplexe Matrizen A, B die Formel $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ (falls das Produkt AB definiert ist) , und ebenso $\overline{(A^{tr})} = (\overline{A})^{tr}$ und $\overline{(A^{-1})} = (\overline{A})^{-1}$ für ein invertierbares A.

i.) Zeigen Sie für $A \in M(n \times m, \mathbb{C})$: $A^{tr}\overline{A}$ ist eine hermitesche, positiv semidefinite Matrix.

ii.) Zeigen Sie für $A \in M(n \times m, \mathbb{C})$:

$$\text{rang}(A) = m \quad \Longrightarrow \quad A^{tr}\overline{A} \text{ positiv definit}$$

Aufgabe 3: (3+3 Punkte)

i.) Sei $A := \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$. Die Matrix A hat offensichtlich vollen Rang, und nach Aufgabe 2.ii) ist dann $B := A^{tr}\overline{A}$ eine hermitesche, positiv definite Matrix und $\phi := \text{Sesq}_B$ ein Skalarprodukt.
Überführen Sie die Basis $(i, 0)^{tr}, (0, i)^{tr}$ mit dem Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt in eine Orthonormalbasis bzgl. ϕ.

ii.) Zeigen Sie, daß die Spalten der folgenden Matrix eine Basis von $M(3 \times 1, \mathbb{C})$ bilden, und überführen Sie diese Basis in eine Orthonormalbasis bzgl. des Standardskalarproduktes auf diesem Raum:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2i+2 & 3i \\ 1 & 2i+1 & 1 \\ i & i & -i \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)
Sei $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, und es sei $X := x^{tr} \cdot \overline{x}$, d.h. $X \in M(n \times n, \mathbb{C})$, und der (i,j)-te Eintrag von X ist $x_i \cdot \overline{x_j}$. Weiter sei $\alpha := \phi_{st,\mathbb{C}}(x,x)$ (Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^n$). Damit sei nun definiert:

$$M := \alpha E_n - 2X.$$

Weiter seien $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ dadurch definiert, daß A als Einträge die Realteile der Einträge von M hat und B analog die Imaginärteile, d.h. es gilt $M = A + iB$. Zeigen Sie nun:

(1) $M^2 = \alpha^2 E_n$.
(2) $AB = -BA$ (d.h. A und B sind antikommutativ).

Abgabe: 09.05.2011 im Hörsaal vor der Vorlesung.