Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb (Fortsetzung von LA IIa/DMA)

Aufgabe 1: (4 Punkte)
In Aufgabe 3 auf Blatt 8 sollten für die sechs Standard-Maximum-Programme (I_j) für $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$,

$$x \geq 0, \quad A \cdot x \leq b, \quad (c^{(j)})^{tr} \cdot x \ \text{ maximal},$$

mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$(c^{(1)}, c^{(2)}, c^{(3)}, c^{(4)}, c^{(5)}, c^{(6)}) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}),$$

die (gemeinsame) Menge der zulässigen Lösungen und die Mengen der optimalen Lösungen bestimmt werden, mit Skizze der Menge der zulässigen Lösungen.
Bestimmen Sie nun für die sechs ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) dualen Standard-Minimum-Programme $(I_j)^*$ (Definition 11.14)

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq 0, \ A^{tr} \cdot y \geq c^{(j)}, \ b^{tr} \cdot y \quad \text{minimal}$$

die Mengen K_j zulässiger Lösungen und die Mengen K_j^{opt} optimaler Lösungen und die Werte $b^{tr} \cdot y$ der optimalen Lösungen für die j mit $K_j^{opt} \neq \emptyset$. Machen Sie für jedes $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ eine eigene Skizze der Menge K_j.
Hinweis: Satz 11.15 und die Lösung von Aufgabe 3 auf Blatt 8 sagen Ihnen, welche K_j leer sind und was die Werte $b^{tr} \cdot y$ der nichtleeren Mengen K_j^{opt} sind.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Das (korrigierte: $b_3 = 21$, nicht $= 15$) Standard-Maximum-Programm zu $j = 3$ in Aufgabe 1 von Blatt 8 ist

$$x \geq 0, \quad A \cdot x \leq b, \quad (c^{(3)})^{tr} \cdot x \ \text{ maximal},$$

mit

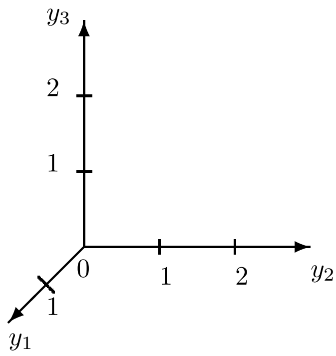
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 24 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix}, \ c^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Das duale Standard-Minimum-Programm (Definition 11.14) ist

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq 0, \quad A^{tr} \cdot y \geq c^{(3)}, \quad b^{tr} \cdot y \quad \text{minimal}.$$

Seine Menge K zulässiger Lösungen ist ein nichtkompaktes dreidimensionales Polyeder mit 5 Ecken in $M(3 \times 1, \mathbb{R})$. Es ist der Schnitt $H_1 \cap H_2 \cap \{y \mid y \geq 0\}$ der beiden Halbräume $H_1 := \{y \mid y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1\}$ und $H_2 := \{y \mid 4y_1 + y_2 + y_3 \geq 2\}$ mit dem Oktanten $\{y \mid y \geq 0\}$.
Machen Sie eine präzise Skizze, indem Sie in ein Bild wie unten (aber am besten deutlich größer) eines Koordinatensystems folgendes eintragen: die Punkte, in denen die Hyperebenen $\partial H_1 := \{y \mid y_1 + y_2 + 3y_3 = 1\}$ und $\partial H_2 := \{y \mid 4y_1 + y_2 + y_3 = 2\}$ jeweils die 3 Koordinatenachsen schneiden (es sind 6 Punkte); die Strecken, in denen

∂H_1 und ∂H_2 jeweils die 3 Seiten $\{y \mid y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 = 0\}$ und $\{y \mid y_1 \geq 0, y_2 = 0, y_3 \geq 0\}$ und $\{y \mid y_1 = 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0\}$ schneiden (es sind 6 Strecken); und die Strecke $\partial H_1 \cap \partial H_2 \cap \{y \mid y \geq 0\}$ und ihre beiden Endpunkte. Dafür müssen Sie natürlich all diese Punkte und Strecken ausrechnen.
An der Skizze sehen Sie die Ecken von K. Geben Sie $E(K)$ an (ein Beweis ist nicht nötig), und geben Sie für jede Ecke p den Wert $b^{tr} \cdot p$ der Ecke an. Finden Sie so $E(K^{opt})$ und den Wert der optimalen Lösungen (tatsächlich ist hier $K^{opt} = E(K^{opt})$).



Aufgabe 3: (4 Punkte)
Das kanonische Minimum-Programm

$$x = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5)^{tr} \geq 0, \quad A \cdot x = b, \quad c^{tr} \cdot x \quad \text{minimal}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5), \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c = (24\ 9\ 21\ 0\ 0)^{tr}$$

hat eine nichtleere und nichtkompakte Menge K zulässiger Lösungen mit 5 Ecken.
Satz 11.8 (a) und der Beweis von Satz 11.8 (b) sagen: $p \in M(5 \times 1, \mathbb{R})$ *ist eine Ecke von* $K \iff p \in K$ *und* $(a_j \mid p_j > 0)$ *ist linear unabhängig. Und dann ist* p *durch* $J(p) := \{j \in \{1,2,3,4,5\} \mid p_j > 0\}$ *eindeutig bestimmt.*
Bestimmen Sie so die Ecken von K. Geben Sie die Ecken p und die Mengen $J(p)$ an. Geben Sie die Werte $c^{tr} \cdot p$ an. Finden Sie so $E(K^{opt})$ und den Wert der optimalen Lösungen (tatsächlich ist hier $K^{opt} = E(K^{opt})$).

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Beim kanonischen Minimum-Programm von Aufgabe 3 ist eine Ecke $p = (1\,0\,0\,0\,2)^{tr}$. Führen Sie mit dieser Ecke den Simplex-Algorithmus durch. Sie sollten in 1 oder 2 Schritten (jeder Schritt ist eine Anwendung von Satz 11.11) auf eine Ecke in $E(K^{opt})$ stoßen und in einem weiteren Schritt (wieder eine Anwendung von Satz 11.11; benutzen Sie hier *nicht* Ihre Lösung von Aufgabe 3) verifizieren, daß diese Ecke in K^{opt} liegt.
Ob Sie in 1 oder in 2 Schritten auf diese Ecke stoßen, hängt davon ab, wie Sie im 1. Schritt das r (Satz 11.11, 3. Fall) wählen. (Für eine gute Wahl dürfen Sie hier die Ergebnisse von Aufgabe 3 im Hinterkopf haben.)

Bemerkung: Die Programme in Aufgabe 2 und in Aufgabe 3 (und Aufgabe 4) sind verwandt. Wenn Sie diese Verwandtschaft verstehen, können Sie die Verwandtschaft der Ergebnise von Aufgabe 2 und Aufgabe 3 verstehen und Ihre Ergebnisse überprüfen. Aber es ist nicht Teil der Aufgaben, diese Verwandtschaft zu dokumentieren.

Abgabe: 02.05.2011 im Hörsaal vor der Vorlesung.