Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb
(Fortsetzung von LA IIa/DMA)

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Die vier Standard-Maximum-Programme für $j = 1, 2, 3, 4$,

$$x \geq 0, \quad A \cdot x \leq b, \quad (c^{(j)})^{tr} \cdot x \ \text{ maximal},$$

mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 24 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix},\ (c^{(1)}, c^{(2)}, c^{(3)}, c^{(4)}) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}),$$

haben die gleiche Menge $K := \{x \in M(2 \times 1, \mathbb{R}) \,|\, x \geq 0, A \cdot x \leq b\}$ zulässiger Lösungen. K ist nicht leer. Alle vier Programme haben auch nichtleere Mengen $K^{(j),opt}$ optimaler Lösungen.
Machen Sie eine präzise Skizze der Menge K, und machen Sie darin die Koordinaten aller Ecken von K kenntlich (ähnlich wie in der Skizze im Beispiel 11.1). Bestimmen Sie mit Hilfe der Skizze die vier Mengen $K^{(j),opt}$ ($j = 1, 2, 3, 4$), und geben Sie diese vier Mengen und ihre Werte $(c^{(j)})^{tr} \cdot x$ an.

Aufgabe 2: (2 Punkte)
Geben Sie das kanonische Maximum-Programm

$$\widetilde{x} \geq 0,\ \widetilde{A} \cdot \widetilde{x} = \widetilde{b},\ \widetilde{c}^{tr} \cdot \widetilde{x} \ \text{ maximal}$$

an, das man durch das Verfahren in Lemma 11.4 (b) aus dem Standard-Maximum-Programm zu $j = 3$ in Aufgabe 1 gewinnt.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Die sechs Standard-Maximum-Programme für $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$,

$$x \geq 0, \quad A \cdot x \leq b, \quad (c^{(j)})^{tr} \cdot x \ \text{ maximal},$$

mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$(c^{(1)}, c^{(2)}, c^{(3)}, c^{(4)}, c^{(5)}, c^{(6)}) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}),$$

haben die gleiche Menge $K := \{x \in M(2 \times 1, R) \,|\, x \geq 0, A \cdot x \leq b\}$ zulässiger Lösungen. K ist nicht leer. Die Mengen optimaler Lösungen werden $K^{(j),opt}$ genannt. Manche von ihnen sind leer, manche nicht.

Bitte wenden!

Machen Sie eine präzise Skizze der Menge K, und machen Sie darin die Koordinaten aller Ecken von K kenntlich
Bestimmen Sie mit Hilfe der Skizze die sechs Mengen $K^{(j),opt}$ ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), und geben Sie diese sechs Mengen an. Für die nichtleeren Mengen $K^{(j),opt}$ geben Sie ihre Werte $(c^{(j)})^{tr} \cdot x$ an.

Aufgabe 4: (1+1+1+1+2 Punkte)
Diese Aufgabe setzt die Kenntnis der Begriffe aus Definition 11.6 voraus (konvexe Menge, Ecke, Hyperebene, Halbraum).
Für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $F(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq f(x)\}$. Die Menge der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ wird mit $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bezeichnet.
Bemerkung: Es ist nicht schwer, für $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit Mitteln der Analysis zu zeigen:

$$F(f) \text{ ist konvex} \iff f''(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Sei $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, und sei $F(f)$ konvex. Zeigen Sie
$$E(F(f)) \subset \text{Graph}(f)(:= \{(x, f(x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}).$$
(b) Sei $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, und sei $F(f)$ konvex. Für ein $x_1 \in \mathbb{R}$ ist $(x_1, f(x_1))$ keine Ecke von $F(f)$ genau dann, wenn $f''(x) = 0$ für alle x nahe x_1 ist.
(c) Geben Sie ein $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ an, so daß die Menge der Ecken $E(F(f))$ von $F(f)$ abzählbar unendlich ist.
(d) Geben Sie ein $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ an, so daß $F(f)$ konvex ist und $\inf(y \,|\, (x, y) \in F(f))$ existiert, aber $\min(y \,|\, (x, y) \in F(f))$ nicht existiert.
(e) Seien $H_1, ..., H_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ Halbräume, und sei $K := H_1 \cap ... \cap H_{n-1}$. Nach Bemerkung 11.7 (v) ist K konvex. Zeigen Sie $E(K) = \emptyset$ (das wird in 11.7 (ix) behauptet, aber nicht bewiesen).

Abgabe: 11.04.2011 im Hörsaal vor der Vorlesung.