Klausur zur Linearen Algebra IIb FSS 2011, 26.08.2011
Universität Mannheim, Prof. Dr. C. Hertling, Ralf Kurbel

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (1P) Geben Sie die Matrix an, welche im $\mathbb{R}^2$ bzgl. der Standardbasis eine Drehung um den Winkel α beschreibt.

ii.) (2P) Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Raum mit dem Skalarprodukt ϕ, und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus von V. Definieren Sie die adjungierte Abbildung f^* zu f.

iii.) (2P) (Hauptachsentransformationssatz)
Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Dann gibt es: ...
Formulieren Sie den Hauptachsentransformationssatz für diese Situation.

iv.) (3P) (Spektralsatz für unitäre Endomorphismen)
Sei V ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ, und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein unitärer Endomorphismus. Dann gilt: ...
Formulieren Sie den Spektralsatz für diese Situation.

Lösung:

i.) Die Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel α bzgl. der Standardbasis wird durch folgende Matrix beschrieben:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

ii.) f^* ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung, für die gilt:

$$\forall v, w \in V\colon \quad \phi\big(f^*(v), w\big) = \phi\big(v, f(w)\big).$$

iii.) Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Dann gibt es eine orthogonale Matrix T mit

$$T^{tr} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Hier sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A.

iv.) Sei V ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ, und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein unitärer Endomorphismus. Dann gilt:

(a) Alle Eigenwerte λ von f erfüllen $|\lambda| = 1$.

(b) Es gibt keine Jordanblöcke außer denen der Größe 1×1, d.h. f ist diagonalisierbar, d.h. $\mathrm{Hau}(f, \lambda) = \mathrm{Eig}(f, \lambda)$ für alle Eigenwerte λ.

(c) Verschiedene Eigenräume sind orthogonal, d.h. $\mathrm{Eig}(f, \lambda) \perp \mathrm{Eig}(f, \mu)$ für alle $\lambda \neq \mu$.

Wegen (b) und (c) gibt es eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Für das Standard-Maximum-Programm

$$x \geq 0, \quad A \cdot x \leq b, \quad c^{tr} \cdot x \text{ maximal}$$

mit

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind die Menge K der zugehörigen Lösungen,

$$K := \{\, x \in M(2 \times 1, \mathbb{R}) \mid x \geq 0,\ A \cdot x \leq b \,\},$$

und die Menge K^{opt} der optimalen Lösungen,

$$K^{opt} := \{\, x \in K \mid c^{tr} \cdot x \text{ maximal} \,\},$$

nicht leer. Machen Sie eine Skizze der Menge K, und machen Sie darin die Koordinaten aller Ecken von K kenntlich. Bestimmen Sie mit Hilfe der Skizze die Menge K^{opt}, und geben Sie ihren Wert $c^{tr} \cdot x$ an.

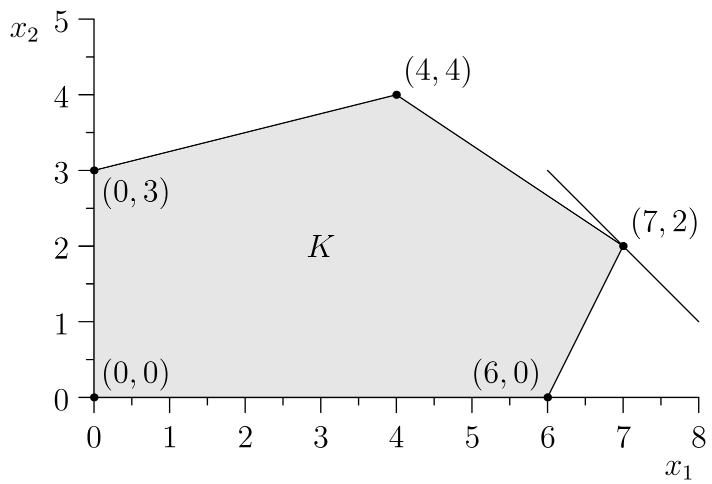
Lösung: Für die Eckenmenge $E(K)$ und K^{opt} gilt

$$E(K) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad K^{opt} = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

und für $x \in K^{opt}$ ist:

$$c^{tr} \cdot x = (1, 1) \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = 9.$$

Skizze:



Matrikelnummer:

Aufgabe 3 (insgesamt 2+6 Punkte) erreicht:

Es sei folgende Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} i & 2-i & 1 \\ -i & 1+i & i+2 \\ 1 & i-1 & 2i+1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C}).$$

Zeigen Sie, daß die Spalten von A eine Basis von $M(3 \times 1, \mathbb{C})$ sind, und überführen Sie diese Basis dann mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren in eine Orthonormalbasis bzgl. des Standardskalarproduktes.

Lösung: Um zu testen, ob die Spalten von A eine Basis von $M(3 \times 1, \mathbb{C})$ sind, kann ein Kriterium der folgenden Äquivalenzenkette genutzt werden:

$$\text{Die Spalten von } A \text{ sind eine Basis} \iff \det(A) \neq 0 \iff \operatorname{rang}(A) = 3.$$

Hier wird das Determinantenkriterium benutzt:

$$\det(A) \overset{\substack{Z_{II}(1,1,2) \\ Z_{II}(i,1,3)}}{=} \det \begin{pmatrix} i & 2-i & 1 \\ 0 & 3 & i+3 \\ 0 & 3i & 3i+1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Laplace} \\ \text{Spalte 1}}}{=} i \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 3 & i+3 \\ 3i & 3i+1 \end{pmatrix}}_{6} = 6i \neq 0.$$

Die Spalten von A seien mit a_1, a_2, a_3 bezeichnet. Beim Gram-Schmidt-Verfahren wird die Basis a_1, a_2, a_3 zuerst in eine Orthogonalbasis b_1, b_2, b_3 umgewandelt, und aus dieser dann durch Normierung die gesuchte Orthonormalbasis c_1, c_2, c_3 gewonnen, d.h. es gilt $c_i := \frac{b_i}{\|b_i\|}$.

Die Vektoren b_i errechnen sich aus den a_i wie folgt:

$$b_1 := a_1, \quad b_2 := a_2 - s_{12} b_1 \quad \text{und} \quad b_3 := a_3 - s_{13} b_1 - s_{23} b_2 \quad \text{mit} \quad s_{ij} := \frac{\langle a_j, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle},$$

wobei mit $\langle x, y \rangle$ das Standardskalarprodukt von x und y bezeichnet sei. Es folgt:

$$b_1 = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \implies s_{12} = -1 \implies b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \implies \begin{matrix} s_{13} = i \\ s_{23} = 1 \end{matrix} \implies b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Norm von b_i ist definiert durch

$$\|b_i\| := \sqrt{\langle b_i, b_i \rangle},$$

und die Orthonormalbasis c_1, c_2, c_3 errechnet sich mit $c_i := \frac{b_i}{\|b_i\|}$ zu:

$$\begin{matrix} \|b_1\| = \sqrt{3}, \\ \|b_2\| = \sqrt{6}, \\ \|b_3\| = \sqrt{2} \end{matrix} \implies c_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, c_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Es sei folgende reelle (3×3)-Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$, für die gilt:

$$T^{-1} = T^{tr} \quad \text{und} \quad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

wobei die λ_i die Eigenwerte von A seien; ein Eigenwert liegt in der Menge $\{0, 1, 2\}$. Ist A positiv definit?

Lösung: Die Matrix T ist eine orthogonale Matrix, und ihre Spalten bestehen aus einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A (siehe Skript 13.8, Spektralsatz für symmetrische Matrizen). Somit muß in folgenden Schritten vorgegangen werden:

- Bestimme die Eigenwerte von A.
- Bestimme Eigenraumbasen zu den zugehörigen Eigenräumen.
- Da die Matrix A drei verschiedene Eigenräume mit jeweils Dimension Eins hat, und Eigenräume einer symmetrischen Matrix orthogonal zueinander sind, ergibt sich eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A, wenn aus jedem Eigenraum ein Basisvektor ausgewählt und normiert wird.

Zur Bestimmung der Eigenwerte wird das charakteristische Polynom $P_A(t)$ von A berechnet:

$$\begin{aligned}
P_A(t) = \det(t \cdot E_3 - A) = \det \begin{pmatrix} t-2 & 1 & 1 \\ 1 & t-2 & 0 \\ 1 & 0 & t-2 \end{pmatrix} &\overset{\substack{\text{Laplace} \\ \text{Spalte 3}}}{=} \dots \\
&= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & t-2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (t-2) \det \begin{pmatrix} t-2 & 1 \\ 1 & t-2 \end{pmatrix} \\
&= -(t-2) + (t-2)\big[(t-2)^2 - 1\big] = (t-2)\big[(t-2)^2 - 2\big] \\
&= (t-2)(t^2 - 4t + 2) = (t-2)\big(t - (2+\sqrt{2})\big)\big(t - (2-\sqrt{2})\big).
\end{aligned}$$

Die Matrix A hat also die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 2 + \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 2 - \sqrt{2},$$

und da eine symmetrische reelle Matrix genau dann positiv definit ist, wenn alle Eigenwerte größer als Null sind, ist A positiv definit.

Zur Berechnung der Eigenräume $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ bitte wenden.

Matrikelnummer:

$\lambda_1 = 2$**:** Der Eigenraum $\mathrm{Eig}(A,2)$ ist der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $(A - 2E_3)x = 0$:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow[Z_{III}(1,2)]{Z_I(-1,1)\; Z_I(-1,2)\; Z_I(-1,3)} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{Z_{II}(-1,1,3)} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Lös}(A - 2E_3) = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \Big\} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

$\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$**:** Der Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, 2+\sqrt{2})$ ist der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $(A - (2+\sqrt{2})E_3)x = 0$:

$$\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{2} & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{array} \xrightarrow[Z_{III}(1,3)]{Z_I(-1,1)\; Z_I(-1,2)\; Z_I(-1,3)} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow[Z_{II}(-\sqrt{2},1,3)]{Z_{II}(-1,1,2)} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow[Z_{II}(-\sqrt{2},2,3)]{Z_{III}(2,3)} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Lös}(A - (2+\sqrt{2}E_3) = \Big\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{2}z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \Big\} = \langle \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

$\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$**:** Der Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, 2-\sqrt{2})$ ist der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $(A - (2-\sqrt{2})E_3)x = 0$:

$$\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2} & -1 & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{array} \xrightarrow[Z_{III}(1,3)]{Z_I(-1,1)\; Z_I(-1,3)} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow[Z_{II}(\sqrt{2},1,3)]{Z_{II}(1,1,2)} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow[Z_{II}(-\sqrt{2},2,3)]{Z_{III}(2,3)} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Lös}(A - (2-\sqrt{2}E_3) = \Big\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \Big\} = \langle \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Die obigen Basisvektoren der einzelnen Eigenräume müssen jetzt nur noch normiert und spaltenweise in T eingesetzt werden:

$$\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \| = \sqrt{2}, \quad \| \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \| = 2, \quad \| \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \| = 2,$$

so daß sich ergibt:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underbrace{T^{-1}}_{=T^{tr}} AT = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2+\sqrt{2} & \\ & & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Die folgende Tabelle gibt Informationen über die (endliche) Gruppe $\mathcal{O}$ der „orientierungserhaltenden Symmetrien“ des Würfels, d.h. der Elemente von $SO(3)$, die einen Würfel im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt in 0 auf sich abbilden.

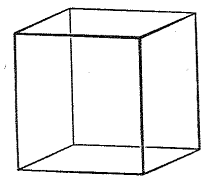
$X :=$ Anzahl der Drehachsen eines Typs,

$Y :=$ Anzahl der Drehungen um Drehachsen eines Typs,

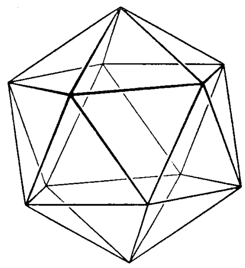
X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
–	–	0	(id :) 1
3	durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$	$3 \cdot 3 = 9$
6	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	6
4	durch gegenüberliegende Ecken	$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$	$4 \cdot 2 = 8$

$$\Longrightarrow\ |\mathcal{O}| = 1 + 9 + 6 + 8 = 24.$$

Machen Sie eine analoge Tabelle für die Gruppe $\mathcal{I}$ der orientierungserhaltenden Symmetrien eines Ikosaeders und bestimmen Sie $|\mathcal{I}|$.



Würfel



Ikosaeder

ii.) (4P) Es sei folgende Matrix gegeben:

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 7 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Geben Sie die Signatur von B an.

Lösung:

i.) Die Tabelle für das Ikosaeder lautet:

X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
–	–	0	(id :) 1
6	durch gegenüberliegende Ecken	$\frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi$	$6 \cdot 4 = 24$
15	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	15
10	durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$	$10 \cdot 2 = 20$

Matrikelnummer:

ii.) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von B (B ist symmetrisch). Die Signatur (r_+, r_0, r_-) von B ist dann definiert durch:

$$\begin{aligned} r_+ &:= \text{Anzahl der Eigenwerte } \lambda_i > 0 \\ r_0 &:= \text{Anzahl der Eigenwerte } \lambda_i = 0 \\ r_- &:= \text{Anzahl der Eigenwerte } \lambda_i < 0 \end{aligned}$$

Somit kann die Signatur von B mit Hilfe der Eigenwerte bestimmt werden. Einen einfacheren Weg zeigt der Satz von Sylvester, denn nach diesem gilt: ist $T \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ mit

$$T^{tr} B T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{pmatrix},$$

so gilt:

$$\begin{aligned} r_+ &= \text{Anzahl der } \alpha_i > 0 \\ r_0 &= \text{Anzahl der } \alpha_i = 0 \\ r_- &= \text{Anzahl der } \alpha_i < 0 \end{aligned}$$

Dabei sind die α_i im allgemeinen keine Eigenwerte von B!
Es reicht nun, die Matrix B mit parallel durchgeführten Zeilen- und Spaltenoperationen zu diagonalieren - die Matrix T wird dabei implizit berechnet, braucht aber nicht explizit angegeben zu werden: nur die resultierenden Diagonalelemente α_i sind von Belang.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_{II}(-\frac{1}{2},1,2)]{Z_{II}(-\frac{1}{2},1,2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_{II}(-2,1,3)]{Z_{II}(-2,1,3)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_{II}(-2,2,3)]{Z_{II}(-2,2,3)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich als Signatur von B: $(2, 0, 1)$.
(Die Matrix T ergibt sich, wenn die Spaltenoperationen in gleicher Reihenfolge auf die Einheitsmatrix E_3 angewendet werden.)

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (3P) Es sei $A \in M(2\times 2, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, und es gelte zusätzlich $A^3 = E_2$. Beweisen Sie, daß dann $A = E_2$ folgt.

ii.) (3P) Es sei (V, ϕ) ein unitärer Vektorraum, und seien f, g Endomorphismen von V. Zeigen Sie:

$$\forall v, w \in V\colon\ \phi\big(v, f(w)\big) = \phi\big(v, g(w)\big) \quad \Longrightarrow \quad f = g.$$

iii.) (2P) Sei V ein komplexer Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$, und sei ϕ eine hermitesche Sesquiliniarform auf V. Alle Basisvektoren seien orthogonal zueinander. Beweisen Sie:

$$\phi(v_i, v_i) > 0 \quad \text{für} \quad 1 \le i \le n \quad \Longrightarrow \quad \phi \text{ positiv definit.}$$

Lösung:

i.) Die symmetrische Matrix A ist diagonalisierbar, so daß es $T \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt mit:

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Daraus folgt sofort:

$$E_2 = A^3 = \Big(T \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix} T^{-1}\Big)^3 = T \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}^3 T^{-1} = T \begin{pmatrix} \lambda^3 & \\ & \mu^3 \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Nach Umstellen von T folgt:

$$\begin{aligned} E_2 = T \begin{pmatrix} \lambda^3 & \\ & \mu^3 \end{pmatrix} T^{-1} &\Longrightarrow T^{-1} E_2 T = \begin{pmatrix} \lambda^3 & \\ & \mu^3 \end{pmatrix} \Longrightarrow E_2 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & \\ & \mu^3 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \lambda^3 = \mu^3 = 1 \Longrightarrow \lambda = \mu = 1 \\ &\Longrightarrow A = T E_2 T^{-1} = E_2. \end{aligned}$$

ii.) Es wird gezeigt, daß $f(w) = g(w)$ für alle $w \in V$ gilt, denn dann sind die beiden Abbildungen f und g gleich.
Nach Voraussetzung gelten folgende Gleichungen für alle $v, w \in V$:

$$\phi\big(v, f(w)\big) = \phi\big(v, g(w)\big) \Longrightarrow \phi\big(v, f(w) - g(w)\big) = 0.$$

Somit gelten sie insbesondere bei gewähltem $w \in V$ für $v := f(w) - g(w)$, und aus der positiven Definitheit von ϕ folgt dann wie gewünscht:

$$\phi\big(\underbrace{f(w) - g(w)}_{v}, f(w) - g(w)\big) = 0 \overset{\phi \text{ pos. def.}}{\Longrightarrow} f(w) - g(w) = 0 \Longrightarrow f(w) = g(w).$$

iii.) Es ist für alle $v \in V$ mit $v \neq 0$ zu zeigen, daß $\phi(v, v) > 0$ gilt. Sie dazu v als Linearkombination der Basis $v_1, \ldots, v_n$ dargestellt, $v := \sum \alpha_i v_i$. Bei $v \neq 0$ muß mindestens Koeffizient ungleich Null sein, also $\alpha_k \neq 0$ für ein k.
Für $i \neq j$ ist $\phi(v_i, v_j) = 0$, und es folgt:

$$\begin{aligned} \phi(v, v) &= \phi\Big(\sum_i \alpha_i v_i, \sum_j \alpha_j v_j\Big) = \sum_i \alpha_i \phi\Big(v_i, \sum_j \alpha_j v_j\Big) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j \underbrace{\phi(v_i, v_j)}_{= 0 \text{ für } i \neq j} = \sum_i \alpha_i \bar{\alpha}_i \phi(v_i, v_i) = \sum_i \underbrace{|\alpha_i|^2}_{\geq 0} \underbrace{\phi(v_i, v_i)}_{>0}. \end{aligned}$$

Da $|\alpha_k|^2 > 0$ gilt, ist in dieser Summe mindestens ein Summand positiv, alle anderen sind größer gleich Null, so daß insgesamt folgt: $\phi(v, v) > 0$.

Matrikelnummer: