Klausur zur Linearen Algebra IIb FSS 2011, 26.08.2011
Universität Mannheim, Prof. Dr. C. Hertling, Ralf Kurbel

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (1P) Geben Sie die Matrix an, welche im $\mathbb{R}^2$ bzgl. des Standardskalarproduktes eine Drehung um den Winkel α beschreibt.

ii.) (2P) Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Raum mit dem Skalarprodukt ϕ, und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus von V. Definieren Sie die adjungierte Abbildung f^* zu f.

iii.) (2P) (Hauptachsentransformationssatz)
Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Dann gibt es: ...
Formulieren Sie den Hauptachsentransformationssatz für diese Situation.

iv.) (3P) (Spektralsatz für unitäre Endomorphismen)
Sei V ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ, und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein unitärer Endomorphismus. Dann gilt: ...
Formulieren Sie den Spektralsatz für diese Situation.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Für das Standard-Maximum-Programm

$$x \geq 0, \quad A \cdot x \leq b, \quad c^{tr} \cdot x \text{ maximal}$$

mit

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind die Menge K der zugehörigen Lösungen,

$$K := \{ x \in M(2 \times 1, \mathbb{R}) \mid x \geq 0,\ A \cdot x \leq b \},$$

und die Menge K^{opt} der optimalen Lösungen,

$$K^{opt} := \{ x \in K \mid c^{tr} \cdot x \text{ maximal} \},$$

nicht leer. Machen Sie eine Skizze der Menge K, und machen Sie darin die Koordinaten aller Ecken von K kenntlich. Bestimmen Sie mit Hilfe der Skizze die Menge K^{opt}, und geben Sie ihren Wert $c^{tr} \cdot x$ an.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 3 (insgesamt 2+6 Punkte) erreicht:

Es sei folgende Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} i & 2-i & 1 \\ -i & 1+i & i+2 \\ 1 & i-1 & 2i+1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C}).$$

Zeigen Sie, daß die Spalten von A eine Basis von $M(3 \times 1, \mathbb{C})$ sind, und überführen Sie diese Basis dann mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren in eine Orthonormalbasis bzgl. des Standardskalarproduktes.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Es sei folgende reelle (3×3)-Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$, für die gilt:

$$T^{-1} = T^{tr} \quad \text{und} \quad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

wobei die λ_i die Eigenwerte von A seien; ein Eigenwert liegt in der Menge $\{0, 1, 2\}$.
Ist A positiv definit?

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Die folgende Tabelle gibt Informationen über die (endliche) Gruppe $\mathcal{O}$ der „orientierungserhaltenden Symmetrien“ des Würfels, d.h. der Elemente von $SO(3)$, die einen Würfel im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt in 0 auf sich abbilden.

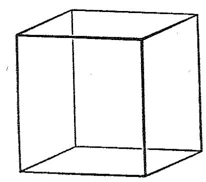
$X :=$ Anzahl der Drehachsen eines Typs,

$Y :=$ Anzahl der Drehungen um Drehachsen eines Typs,

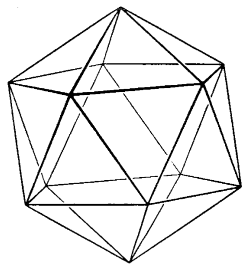
X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
–	–	0	(id :) 1
3	durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$	$3 \cdot 3 = 9$
6	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	6
4	durch gegenüberliegende Ecken	$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$	$4 \cdot 2 = 8$

$$\Longrightarrow\ |\mathcal{O}| = 1 + 9 + 6 + 8 = 24.$$

Machen Sie eine analoge Tabelle für die Gruppe $\mathcal{I}$ der orientierungserhaltenden Symmetrien eines Ikosaeders und bestimmen Sie $|\mathcal{I}|$.



Würfel



Ikosaeder

ii.) (4P) Es sei folgende Matrix gegeben:

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 7 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Geben Sie die Signatur von B an.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (3P) Es sei $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, und es gelte zusätzlich $A^3 = E_2$. Beweisen Sie, daß dann $A = E_2$ folgt.

ii.) (3P) Es sei (V, ϕ) ein unitärer Vektorraum, und seien f, g Endomorphismen von V. Zeigen Sie:

$$\forall v, w \in V: \ \phi\big(v, f(w)\big) = \phi\big(v, g(w)\big) \quad \Longrightarrow \quad f = g.$$

iii.) (2P) Sei V ein komplexer Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$, und sei ϕ eine hermitesche Sesquiliniarform auf V. Alle Basisvektoren seien orthogonal zueinander. Beweisen Sie:

$$\phi(v_i, v_i) > 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq n \quad \Longrightarrow \quad \phi \text{ positiv definit.}$$

Matrikelnummer: