Klausur zur Linearen Algebra IIb FSS 2011, 09.06.2011
Universität Mannheim, Prof. Dr. C. Hertling, Ralf Kurbel

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (1P) Seien $x := (x_1, \ldots, x_n), y := (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Definieren Sie das Standardskalarprodunkt für x und y.

ii.) (2P) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Geben Sie zwei äquivalente Bedingungen/Definitionen dafür an, daß A unitär ist.

iii.) (2P) (Spektralsatz für orthogonale Matrizen)
Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix. Dann gilt: ...
Formulieren Sie den Spektralsatz für diese Situation.

iv.) (3P) (Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen endlichdimensionaler unitärer Vektorräume)
Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $f\colon V \longrightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gilt: ...
Formulieren Sie den Spektralsatz für diese Situation.

Lösung:

i.) (Skript: 12.13.i)

$$\phi_{st,\mathbb{C}}\big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

ii.) Zwei der folgenden äquivalenten Aussagen wäre eine Lösung der Aufgabe:
- $A^* = A^{-1}$.
- $AA^* = E_n$.
- Die Spalten von A sind eine Orthonormalbasis von $M(n \times 1, \mathbb{C})$.

iii.) **Satz 14.7.a** (Spektralsatz für orthogonale Matrizen)
Sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix, d.h. $A^{tr} = A^{-1}$. Dann gibt es eine orthogonale Matrix $T \in GL(n, \mathbb{R})$, so daß $T^{-1} \cdot A \cdot T$ die Block-Gestalt hat (wo nichts steht, stehen Nullen):

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} E_k & & & & & & \\ & -E_l & & & & & \\ & & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & & & \\ & & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \cos\alpha_m & -\sin\alpha_m \\ & & & & & \sin\alpha_m & \cos\alpha_m \end{pmatrix}.$$

Hier ist $k \geq 0$, $l \geq 0$, $m \geq 0$ und natürlich $k + l + 2m = n$. Die Winkel α_i sind in $[0, 2\pi) - \{0, \pi\}$.

iv.) **Satz 13.7.a** (Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen über $\mathbb{C}$)
Sei V ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ, und sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gilt:

i.) Alle Eigenwerte λ von f sind reell.

ii.) Es gibt keine Jordanblöcke außer denen der Größe 1×1, d.h. f ist diagonalisierbar, d.h. $\mathrm{Hau}(f, \lambda) = \mathrm{Eig}(f, \lambda)$ für alle Eigenwerte λ.

iii.) Verschiedene Eigenräume sind orthogonal, d.h.

$$\mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \perp \mathrm{Eig}(f, \lambda_2) \quad \text{für alle } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Wegen (ii) und (iii) gibt es eine ON-Basis von V aus Eigenvektoren von f.

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Für das Standard-Maximum-Programm

$$x \geq 0, \quad A \cdot x \leq b, \quad c^{tr} \cdot x \text{ maximal}$$

mit

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sind die Menge K der zugehörigen Lösungen,

$$K := \{\, x \in M(2 \times 1, \mathbb{R}) \mid x \geq 0,\ A \cdot x \leq b \,\},$$

und die Menge K^{opt} der optimalen Lösungen,

$$K^{opt} := \{\, x \in K \mid c^{tr} \cdot x \text{ maximal} \,\},$$

nicht leer. Machen Sie eine Skizze der Menge K, und machen Sie darin die Koordinaten aller Ecken von K kenntlich. Bestimmen Sie mit Hilfe der Skizze die Menge K^{opt}, und geben Sie ihren Wert $c^{tr} \cdot x$ an.

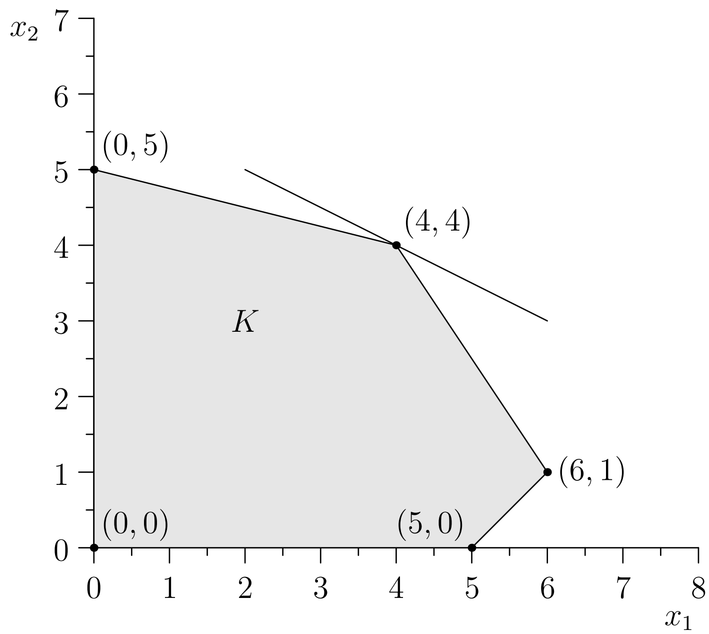
Lösung: Für die Eckenmenge $E(K)$ und K^{opt} gilt

$$E(K) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad K^{opt} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$$

und für $x \in K^{opt}$ ist:

$$c^{tr} \cdot x = (1, 2) \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 12.$$

Skizze:



Matrikelnummer:

Aufgabe 3 (insgesamt 2+6 Punkte) erreicht:

Es sei folgende Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3i \\ i & i+2 & 1 \\ 1 & 1 & -i \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C}).$$

Zeigen Sie, daß die Spalten von A eine Basis von $M(3 \times 1, \mathbb{C})$ sind, und überführen Sie diese Basis dann mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren in eine Orthonormalbasis bzgl. des Standardskalarproduktes.

Lösung: Um zu testen, ob die Spalten von A eine Basis von $M(3 \times 1, \mathbb{C})$ sind, kann ein Kriterium der folgenden Äquivalenzenkette genutzt werden:

$$\text{Die Spalten von } A \text{ sind eine Basis} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{rang}(A) = 3.$$

Hier wird das Determinantenkriterium benutzt:

$$\det(A) \overset{Z_{II}(-i,3,2)}{=} \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3i \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -i \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Laplace} \\ \text{Spalte 1}}}{=} \det \begin{pmatrix} 2 & 3i \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -6i \neq 0.$$

Die Spalten von A seien mit a_1, a_2, a_3 bezeichnet. Beim Gram-Schmidt-Verfahren wird die Basis a_1, a_2, a_3 zuerst in eine Orthogonalbasis b_1, b_2, b_3 gewandelt, und aus dieser dann durch Normierung die gesuchte Orthonormalbasis c_1, c_2, c_3 gewonnen, d.h. es gilt $c_i := \frac{b_i}{\|b_i\|}$.
Die Vektoren b_i errechnen sich aus den a_i wie folgt:

$$b_1 := a_1, \quad b_2 := a_2 - s_{12}b_1 \quad \text{und} \quad b_3 := a_3 - s_{13}b_1 - s_{23}b_2 \quad \text{mit} \quad s_{ij} := \frac{\langle a_j, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle},$$

wobei mit $\langle x, y \rangle$ das Standardskalarprodukt von x und y bezeichnet sei. Es folgt:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow s_{12} = 1 - i \Longrightarrow b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{l} s_{13} = -i \\ s_{23} = i \end{array} \Longrightarrow b_3 = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Norm von b_i ist definiert durch

$$\|b_i\| := \sqrt{\langle b_i, b_i \rangle},$$

und die Orthonormalbasis c_1, c_2, c_3 errechnet sich mit $c_i := \frac{b_i}{\|b_i\|}$ zu:

$$\begin{array}{l} \|b_1\| = \sqrt{2}, \\ \|b_2\| = \sqrt{6}, \\ \|b_3\| = \sqrt{3} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, c_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Es sei folgende reelle (3×3)-Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$, für die gilt:

$$T^{-1} = T^{tr} \quad \text{und} \quad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

wobei die λ_i die Eigenwerte von A seien. Ist A positiv definit?

Lösung: Die Matrix T ist eine orthogonale Matrix, und ihre Spalten bestehen aus einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A (siehe Skript 13.8, Spektralsatz für symmetrische Matrizen). Somit muß in folgenden Schritten vorgegangen werden:

- Bestimme die Eigenwerte von A.
- Bestimme Eigenraumbasen zu den zugehörigen Eigenräumen.
- Orthonormalisiere die Basen jedes einzelnen Eigenraumes mit dem Verfahren von Gram-Schmidt, falls der jeweilige Eigenraum eine Dimension größer als 2 hat.

Nach dem Spektralsatz sind die einzelnen Eigenräume orthogonal zueinander, so daß aus den orthonormalen Basen der Eigenräume eine Orthonormalbasis des gesamten Raumes zusammengesetzt werden kann.

Zur Bestimmung der Eigenwerte wird das charakteristische Polynom $P_A(t)$ von A berechnet:

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 8 & 4 \\ 8 & t-1 & 4 \\ 4 & 4 & t-7 \end{pmatrix} \overset{Z_I I(-1,1,2)}{=} \det \begin{pmatrix} t-1 & 8 & 4 \\ -t+9 & t-9 & 0 \\ 4 & 4 & t-7 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{Laplace} \\ \text{Zeile 2}}}{=} (t-9) \det \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & t-7 \end{pmatrix} + (t-9) \det \begin{pmatrix} t-1 & 4 \\ 4 & t-7 \end{pmatrix}$$

$$= (t-9)\big[(8t - 56 - 16) + (t^2 - 8t + 7 - 16)\big] = (t-9)(t^2 - 81)$$

$$= (t-9)(t-9)(t+9) = (t-9)^2(t+9).$$

Die Matrix A hat also die Eigenwerte 9 und -9, und da eine symmetrische reelle Matrix genau dann positiv definit ist, wenn alle Eigenwerte größer als Null sind, ist A nicht positiv definit.

Zur Berechnung der Eigenräume $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$:

$\lambda = 9$**:** Es gilt $\mathrm{Eig}(A, 9) = \ker(A - 9E_3)$, und es ergibt sich aus der Lösung des homogenen Gleichungssystems $(A - 9E_3)x = 0$:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 8 & 8 & 4 & 0 \\ 8 & 8 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{Z_I(\frac{1}{4},1)} \left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right. \xrightarrow[Z_{II}(-2,1,3)]{Z_{II}(-4,1,2)} \left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \text{Lös}(A-9E_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2x-2y \end{pmatrix} \mid x,y \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle.$$

$\lambda = -9$**:** Es gilt $\text{Eig}(A,-9) = \ker(A+9E_3)$, und es ergibt sich aus der Lösung des homogenen Gleichungssystems $(A+9E_3)x = 0$:

$$\begin{array}{ccc|c} -10 & 8 & 4 & 0 \\ 8 & -10 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & -16 & 0 \end{array} \xrightarrow[Z_{III}(1,3)]{Z_I(\frac{1}{4},3)} \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 8 & -10 & 4 & 0 \\ -10 & 8 & 4 & 0 \end{array} \xrightarrow[Z_{II}(10,1,3)]{Z_{II}(-8,1,2)} \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -18 & 36 & 0 \\ 0 & 18 & -36 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow[Z_I(-\frac{1}{18},2)]{Z_{II}(1,2,3)} \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Longrightarrow y = 2z \Longrightarrow x = 2z$$

$$\Longrightarrow \text{Lös}(A-9E_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Die Basis von $\text{Eig}(A,9)$ muß nun mit Gram-Schmidt in eine Orthonormalbasis des Eigenraumbes gewandelt werden. Dabei werden die Vektoren zuerst orthogonalisiert ($a_i \rightsquigarrow b_i$, siehe Lösung zu Aufgabe 3):

$$b_1 := a_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_1 := a_2 - s_{12}b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Nach Normierung ($b_i \rightsquigarrow c_i$) ergibt sich:

$$\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \| = \sqrt{5}, \quad \| \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \| = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\Longrightarrow \quad c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Der Basisvektor aus $\text{Eig}(A,-9)$ muß nur normiert werden zu einer Orthonormalbasis t_1 dieses Eigenraumes:

$$\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \| = 3 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun können die Orthonormalbasen der Eigenräume zu einer Orthonormalbasis des Gesamtraumes zusammengesetzt werden, und $T := (t_1, c_1, c_2)$ liefert dann:

$$\underbrace{T^{-1}}_{=T^{tr}} AT = \begin{pmatrix} -9 & & \\ & 9 & \\ & & 9 \end{pmatrix}.$$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Es seien folgende Abbildungen der reellen Ebene definiert:

$$d_\alpha := \text{Drehung um den Winkel } \alpha,$$

$$s_v := \text{Spiegelung an der Geraden durch } v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Tragen Sie in die folgende Tabelle das Ergebnis der Verknüpfungen zwischen diesen Abbildungen ein.
Der Winkel zwischen w und v soll dabei γ genannt werden (also ist $-\gamma$ der Winkel zwischen v und w).

$\circ$	d_β	s_w
d_α	$d_\alpha \circ d_\beta = d_{\ldots}$	$d_\alpha \circ s_w = s_{\ldots}$
s_v	$s_v \circ d_\beta = s_{\ldots}$	$s_v \circ s_w = d_{\ldots}$

ii.) (4P) Es sei folgende Matrix gegeben:

$$B := \begin{pmatrix} 3 & 1-i & 1+i \\ 1+i & 13 & 1-i \\ 1-i & 1+i & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C}).$$

Zeigen Sie, daß B eine positiv definite Matrix ist.

Lösung:

i.) Die Tabelle ausgefüllt lautet:

$\circ$	d_β	s_w
d_α	$d_\alpha \circ d_\beta = d_{\alpha+\beta}$	$d_\alpha \circ s_w = s_{d_{\frac{\alpha}{2}}(w)}$
s_v	$s_v \circ d_\beta = s_{d_{-\frac{\beta}{2}}(v)}$	$s_v \circ s_w = d_{2\gamma}$

Matrikelnummer:

ii.) Es reicht, daß Haupminorenkriterium anzuwenden (Skript 12.13) und zu testen, ob alle Hauptminoren größer als Null sind:

$$\det(3) = 3 > 0, \qquad \det\begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 13 \end{pmatrix} = 39 - (1-i^2) = 39 - 2 = 37 > 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 1-i & 1+i \\ 1+i & 13 & 1-i \\ 1-i & 1+i & 1 \end{pmatrix} \overset{Z_{II}(-1,3,2)}{=} \det\begin{pmatrix} 3 & 1-i & 1+i \\ 2i & 12-i & -i \\ 1-i & 1+i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{S_{II}(-1,3,2)}{=} \det\begin{pmatrix} 3 & -2i & 1+i \\ 2i & 12 & -i \\ 1-i & i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Sarrus}}{=} 36 + 2i^2(1+i) + 2i^2(1-i) - [12(1-i^2) - 4i^2 - 3i^2]$$
$$= 36 - 2(1+i+1-i) - [24+4+3] = 36 - 4 - 31 = 1 > 0.$$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (3P) Es sei $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix, und es gelte zusätzlich:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a_{ij} \geq 0.$$

Beweisen Sie:

$$A \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

ii.) (3P) Es sei (V, ϕ) ein unitärer Vektorraum und f ein unitärer Endomorphismus von V. Weiter sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von f.
Beweisen Sie: $|\lambda| = 1$.

iii.) (2P) Bestimmen Sie alle isotropen Elemente der folgenden symmetrischen Bilinearform des $M(2 \times 1, \mathbb{R})$:

$$\mathrm{Bil}_A \quad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

Lösung:

i.) Daß A eine orthogonale Matrix ist, hat zwei wesentliche Konsequenzen:

$(*1)$: Die Spalten von A stehen senkrecht aufeinander, d.h. es gilt

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0,$$

und wegen $a_{ij} \geq 0$ müssen beide Produkte Null sein und somit mindestens ein Faktor in jedem Produkt.

$(*2)$: Die Spalten von A haben die Länge Eins, d.h. es gilt

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 = a_{12}^2 + a_{22}^2,$$

und insbesondere sind die Spalten keine Nullspalten, also mindestens ein Element jeder Spalte ungleich Null.
Ist ein Element einer Spalte gleich Null, so muß wegen Länge Eins und $a_{ij} \geq 0$ dann das andere Element Eins sein.

Es wird sich erweisen, daß schon die Betrachtung $a_{11} = 0$ oder $a_{11} \neq 0$ die Klassifikation aller A liefert.

$$a_{11} \neq 0 \stackrel{(*1)}{\Longrightarrow} a_{12} = 0 \stackrel{(*2)}{\Longrightarrow} a_{22} = 1 \stackrel{(*1)}{\Longrightarrow} a_{21} = 0 \stackrel{(*2)}{\Longrightarrow} a_{11} = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 0 \stackrel{(*2)}{\Longrightarrow} a_{21} = 1 \stackrel{(*1)}{\Longrightarrow} a_{22} = 0 \stackrel{(*2)}{\Longrightarrow} a_{12} = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ii.) Für die unitäre Abbildung f gilt: $\phi\big(f(v), f(w)\big) = \phi(v, w)$ für alle $v, w \in V$.
Sei nun $v \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, d.h. $f(v) = \lambda v$. Dann folgt, da wegen $\phi(v, v) \neq 0$ (ϕ ist positiv definit) eine Gleichung durch $\phi(v, v)$ geteilt werden darf:

$$\phi(v, v) = \phi\big(f(v), f(v)\big) = \phi(\lambda v, \lambda v) = \lambda\overline{\lambda}\phi(v, v) = |\lambda|^2\phi(v, v)$$
$$\Longleftrightarrow 1 = |\lambda|^2 \iff 1 = |\lambda|$$

Matrikelnummer:

iii.) Gesucht ist die Menge aller Vektoren $(x, y)^{tr} \neq (0, 0)$ mit

$$(x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = 2xy = 0.$$

Es folgt sofort:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ist isotrop} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \neq 0 \right\}.$$

Geometrisch ist die Menge der isotropen Elemente die Menge der Koordinatenachsen ohne den Ursprung.