**Klausur zur Linearen Algebra IIb FSS 2011, 09.06.2011**
**Universität Mannheim, Prof. Dr. C. Hertling, Ralf Kurbel**

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

**Viel Erfolg!**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

Name: Sitzplatz:

**Aufgabe 1** (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (1P) Seien $x := (x_1, \dots, x_n), y := (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Definieren Sie das Standardskalarprodunkt für $x$ und $y$.

ii.) (2P) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Geben Sie zwei äquivalente Bedingungen/Definitionen dafür an, daß $A$ unitär ist.

iii.) (2P) (Spektralsatz für orthogonale Matrizen)
Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix. Dann gilt: ...
Formulieren Sie den Spektralsatz für diese Situation.

iv.) (3P) (Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen endlichdimensionaler unitärer Vektorräume)
Sei $V$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $f\colon V \longrightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gilt: ...
Formulieren Sie den Spektralsatz für diese Situation.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

**Aufgabe 2** (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Für das Standard-Maximum-Programm

$$x \geq 0, \quad A \cdot x \leq b, \quad c^{tr} \cdot x \text{ maximal}$$

mit

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sind die Menge $K$ der zugehörigen Lösungen,

$$K := \{\, x \in M(2 \times 1, \mathbb{R}) \mid x \geq 0,\ A \cdot x \leq b \,\},$$

und die Menge $K^{opt}$ der optimalen Lösungen,

$$K^{opt} := \{\, x \in K \mid c^{tr} \cdot x \text{ maximal} \,\},$$

nicht leer. Machen Sie eine Skizze der Menge $K$, und machen Sie darin die Koordinaten aller Ecken von $K$ kenntlich. Bestimmen Sie mit Hilfe der Skizze die Menge $K^{opt}$, und geben Sie ihren Wert $c^{tr} \cdot x$ an.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

**Aufgabe 3** (insgesamt 2+6 Punkte) erreicht:

Es sei folgende Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3i \\ i & i+2 & 1 \\ 1 & 1 & -i \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C}).$$

Zeigen Sie, daß die Spalten von $A$ eine Basis von $M(3 \times 1, \mathbb{C})$ sind, und überführen Sie diese Basis dann mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren in eine Orthonormalbasis bzgl. des Standardskalarproduktes.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

**Aufgabe 4** (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Es sei folgende reelle $(3 \times 3)$-Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$, für die gilt:

$$T^{-1} = T^{tr} \quad \text{und} \quad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

wobei die $\lambda_i$ die Eigenwerte von $A$ seien. Ist $A$ positiv definit?

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

**Aufgabe 5** (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Es seien folgende Abbildungen der reellen Ebene definiert:

$$d_\alpha := \text{Drehung um den Winkel } \alpha,$$

$$s_v := \text{Spiegelung an der Geraden durch } v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Tragen Sie in die folgende Tabelle das Ergebnis der Verknüpfungen zwischen diesen Abbildungen ein.
Der Winkel zwischen $w$ und $v$ soll dabei $\gamma$ genannt werden (also ist $-\gamma$ der Winkel zwischen $v$ und $w$).

| $\circ$ | $d_\beta$ | $s_w$ |
|---|---|---|
| $d_\alpha$ | $d_\alpha \circ d_\beta = d_{\dots}$ | $d_\alpha \circ s_w = s_{\dots}$ |
| $s_v$ | $s_v \circ d_\beta = s_{\dots}$ | $s_v \circ s_w = d_{\dots}$ |

ii.) (4P) Es sei folgende Matrix gegeben:

$$B := \begin{pmatrix} 3 & 1-i & 1+i \\ 1+i & 13 & 1-i \\ 1-i & 1+i & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C}).$$

Zeigen Sie, daß $B$ eine positiv definite Matrix ist.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

**Aufgabe 6** (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (3P) Es sei $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix, und es gelte zusätzlich:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a_{ij} \geq 0.$$

Beweisen Sie:

$$A \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

ii.) (3P) Es sei $(V, \phi)$ ein unitärer Vektorraum und $f$ ein unitärer Endomorphismus von $V$. Weiter sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $f$.
Beweisen Sie: $|\lambda| = 1$.

iii.) (2P) Bestimmen Sie alle isotropen Elemente der folgenden symmetrischen Bilinearform des $M(2 \times 1, \mathbb{R})$:

$$\mathrm{Bil}_A \quad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

Matrikelnummer: