Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Ralf Kurbel

Blatt 7
28.03.2011

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa/Diskreten Mathematik A

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Es sei folgende Basis $\mathbb{R}$-Vektorraumes $M(4 \times 1, \mathbb{R})$ gegeben:

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Berechnen Sei daraus mit dem Verfahren von Gram-Schmidt eine Orthogonalbasis.

Aufgabe 2: (3+1 Punkte)
Gegeben sei folgende reelle (4×4)-Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 & -25 \\ -4 & 15 & -39 & 97 \\ 10 & -39 & 101 & -251 \\ -25 & 97 & -251 & 624 \end{pmatrix}.$$

i.) Geben Sie eine invertierbare reelle Matrix T und Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ an, so daß gilt:

$$T^{tr} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \alpha_3 & \\ & & & \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Gehen Sie nach dem Algorithmus aus Beispiel 10.20 vor.

ii.) Sei $\phi := \mathrm{Bil}_A$ die durch A gegebene Bilinearform auf dem Raum $M(4 \times 1, \mathbb{R})$. Geben Sie eine Basis $\mathcal{B}$ an, so daß gilt:

$$M(\mathcal{B}, \phi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \varepsilon_3 & \\ & & & \varepsilon_4 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\} \quad \text{und} \quad \varepsilon_i \leq \varepsilon_{i+1}.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte) Es sei folgende reelle (3×3)-Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine invertierbare Matrix T an mit:

$$T^{-1} = T^{tr} \quad \text{und} \quad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

wobei die λ_i die Eigenwerte von A seien. Ist A positiv definit?

Bitte wenden!

Aufgabe 4: (1+3 Punkte)
Es sei folgende symmetrische reelle Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

i.) Beweisen Sie: A hat zwei reelle Eigenwerte, d.h. es gibt Elemente $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $P_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$.

ii.) Beweisen Sie, daß folgende Aussage für die beiden Eigenwerte gilt:

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a > 0, \quad \det(A) > 0.$$

Bemerkung: In Teil i.) der Aufgabe sollen sie für den Spezialfall $n = 2$ einen elementaren Beweis von Satz 10.22.(i) führen. Teil ii) hat folgende Bewandnis: Nach Satz 10.23 gilt für die Matrix A die Äquivalenz

$$A \text{ positiv definit} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda_1, \lambda_2 > 0,$$

und die obigen Bedingungen $a > 0$ und $\det(A) > 0$ bedeuten im Kontext von Satz 10.24, daß alle Hauptminoren von A positiv sind. Somit liefert Teil ii.) der Aufgabe einen Beweis für Satz 10.24 für den Spezialfall $n = 2$.

Abgabe: 01.04.2011 im Hörsaal vor der Vorlesung.