Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa/Diskreten Mathematik A

Aufgabe 1: (1+1+2 Punkte) (Diese Aufgabe ist eine Fortsetzung von Blatt 3, Aufgabe 4, und Blatt 4, Aufgabe 3.)
Sei V ein K-Vektorraum mit $n := \dim_K V$, und sei $\phi\colon V \longrightarrow V$ ein nilpotenter Endomorphismus. Folgende Aussage ist zu Satz 8.8.b und 8.8.c äquivalent:

> Es gibt ein Basis von V, die aus ϕ-zyklischen Ketten besteht. Weiter gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $k, r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$, so daß gilt: jede Basis aus ϕ-zyklischen Ketten von V besteht aus k Ketten der Längen r_1 bis r_k.

i.) Beweisen Sie: $\dim \mathrm{Eig}(\phi, 0) = k$ (die Anzahl der ϕ-zyklischen Ketten).

ii.) Beweisen Sie (mit $U_i := \ker \phi^i$, siehe Blatt 4, Aufgabe 3) für $i \in \mathbb{N}$:

$$\dim U_i - \dim U_{i-1} = \text{Anzahl der } \phi\text{-Ketten der Länge} \geq i.$$

iii.) Bestimmen Sie aus folgender Vorgabe der $\dim U_i$ die Anzahl und Länge der ϕ-zyklischen Ketten und damit die Jordannormalform von ϕ (jede ϕ-zyklische Kette der Länge r_i liefert einen Jordanblock der Größe r_i, wie in Blatt 3, Aufgabe 4 gesehen).

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\dim U_i$	4	8	11	14	16	18	19	19

Aufgabe 2: (1+1+1+2 Punkte) Es sei f die durch folgende Matrix definierte Abbildung von $M(3 \times 1, \mathbb{Q})$ nach $M(3 \times 1, \mathbb{Q})$:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q}).$$

i.) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $P_A(t)$ und die Eigenwerte von A. Hinweis: $P_A(t) = (t - \lambda)^3$ für ein geeignetes λ.

ii.) Es folgt sofort, daß die Abbildung $\phi := f - \lambda \cdot \mathrm{id}$ das charakteristische Polynom t^3 hat, und dann aus dem Satz von Cayley-Hamilton, daß sie nilpotent ist. $k, r_1, \ldots, r_k$ und die U_i werden für dieses ϕ wie in Aufgabe 1 definiert. Offenbar ist $U_1 = \mathrm{Eig}(f, \lambda)$. Bestimmen Sie $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$.

iii.) Aus ii) folgt $\dim U_1 = 1$. Bestimmen Sie daraus ohne weitere Rechnung $\dim U_i$ für alle i und zeigen Sie: $k = 1$ und $r_1 = 3$.
Zeigen Sie, daß jeder Vektor v in $M(3 \times 1, \mathbb{Q}) \setminus U_2$ eine ϕ-zyklische Kette der Länge 3 erzeugt, und daß $\mathcal{B} := \big(\phi^2(v), \phi(v), v\big)$ eine Basis von $M(3 \times 1, \mathbb{Q})$ ist.

iv.) Bestimmen Sie U_2, wählen Sie ein v wie in iii) und bestimmen Sie (für $\mathcal{B}$ wie in iii)) $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$.
Bemerkung: die in Teil iii.) gefundene Ketten-Basis bezieht sich auf die Abbildung $f - \lambda \cdot \mathrm{id}$, in Teil iv.) wird die Abbildung f bzgl. dieser Basis dargestellt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: (2+3 Punkte)
Aufgabe 1 und Aufgabe 2 zeigen, wie für eine Abbildung f deren Jordannormalform berechnet werden kann (falls deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt: siehe Satz 8.8): Für jeden Eigenwert λ sei $f_\lambda := f - \lambda \cdot \mathrm{id}$. Weiter seien definiert:

$$U_i(\lambda) := \ker f_\lambda^j \quad \text{für} \quad j \in \mathbb{N}_0 \quad \text{mit} \quad f_\lambda^0 = \mathrm{id}.$$

$U_i(0)$ ist somit das U_i aus den vorherigen Aufgaben zu nilpotenten Endomorphismen. Es gilt $U_0(\lambda) \subseteq U_1(\lambda) \subseteq U_2(\lambda) \subseteq \ldots$, und es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\{0\} = U_i(\lambda) \subsetneq U_1(\lambda) \subsetneq \ldots \subsetneq U_k(\lambda) = U_{k+1}(\lambda) = \ldots$$

Dabei gilt: $U_k(\lambda) = \mathrm{Hau}(f, \lambda)$. f_λ ist nilpotent auf $\mathrm{Hau}(f, \lambda) = U_k(\lambda)$, und die Kette der $U_j(\lambda)$ entspricht der Kette U_j aus Aufgabe 1.ii). Somit können wieder aus den Dimensionsdifferenzen die Kettenlängen errechnet werden, welche wiederum die Jordanblöcke zum Eigenwert λ liefern.

i.) Zu einem Endomorphismus f seien folgende Größen bekannt: das charakteristische Polynom von f zerfällt in Linearfaktoren, f besitzt die vier Eigenwerte λ_1 bis λ_4, und für die Dimensionen der Räume $U_j(\lambda_i)$ gilt:

j	1	2	3	4	5	6	7
$\dim U_j(\lambda_1)$	2	4	6	7	8	9	9
$\dim U_j(\lambda_2)$	3	6	8	9	9	9	9
$\dim U_j(\lambda_3)$	4	8	11	13	15	16	16
$\dim U_j(\lambda_4)$	4	4	4	4	4	4	4

Bestimmen Sie die Jordannormalform von f.

ii.) Bestimmen Sie die Jordannormalform der folgenden Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: (2 Punkte)
Nach Satz 7.5 ist die Determinantenabbildung $\det\colon M(n \times n, K) \longrightarrow K$ multilinear in den Zeilen einer Matrix, und so kann det als n-multilineare Abbildung

$$\det\colon \underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{n \text{ mal}} \longrightarrow K$$

aufgefaßt werden. Insbesondere ist det dann für den Fall $n = 2$ bilinear.
Sei $\mathcal{E}_n := (e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis von $K^n = M(1 \times n, K)$. Bestimmen Sie $M(\mathcal{E}_2, \det, \mathcal{E}_2)$ aus Definition 9.3.b.

Abgabe: 21.03.2011 im Hörsaal zwischen Vorlesung und großer Übung