Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI — Blatt 4
Prof. Dr. Claus Hertling, Ralf Kurbel — 07.03.2011

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa/Diskreten Mathematik A

Aufgabe 1: (4 Punkte) Berechnen Sie für die folgenden beiden Matrizen das charakteristische Polynom, die Eigenwerte, Eigenräume und Basen der Eigenräume:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q}) \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Q}).$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Testen Sie, ob die folgenden Matrizen diagonalisierbar sind, und geben Sie gegebenenfalls eine entsprechende Basiswechselmatrix an (d.h. B mit $B^{-1}AB$ = Diagonalmatrix, falls A diagonalisierbar ist):

$$S := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{F}_5) \quad \text{und} \quad T := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{C}).$$

Aufgabe 3: (1+1+2 Punkte) Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und seien $\phi, \psi \in \mathrm{End}_K(V)$. Beweisen Sie:

i.) ϕ nilpotent $\iff$ $M_\phi(t) = t^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

ii.) Sind ϕ und ψ nilpotent und gilt $\phi\psi = \psi\phi$, so sind auch $\phi+\psi$ und $\phi\psi$ nilpotent.

iii.) Sei ϕ nilpotent und $M_\phi(t) = t^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Weiter sei $U_i := \ker \phi^i$ für $0 \le i \le k$ (mit $\phi^0 := id$). Dann gilt:

$$\{0\} = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \ldots \subsetneq U_k = V.$$

Aufgabe 4: (1+2+1 Punkte)
Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Wenn es einen Gruppenhomomorphismus

$$\Phi\colon G \longrightarrow Bij(X, X)$$

gibt, sagt man, daß G durch Φ auf X operiert und definiert eine Verknüpfung

$$\bullet\colon G \times X \longrightarrow X \quad \text{durch} \quad g \bullet x := \Phi(g)(x) \quad \text{für} \quad g \in G, x \in X.$$

Für $x \in X$ seien folgende Mengen definiert:

$$G(x) := \{\, g \bullet x \mid g \in G \,\} \subseteq X,$$
$$G_x := \{\, g \in G \mid g \bullet x = x \,\} \subseteq G.$$

$G(x)$ heißt der Orbit von x, und G_x der Stabilisator von x, und es gilt:

a.) G_x ist eine Untergruppe von G.

b.) Sind G und X endlich, so gilt die Orbitformel

$$|G| = |G_x| \cdot |G(x)|.$$

Bitte wenden!

Bemerkung: diese Aussagen (und Begriffsbildungen) wurden in Aufgabe 6 der Zwischenklausur für den Spezialfall $G \subseteq Bij(X, X)$ bewiesen, wobei die Abbildung Φ dann einfach die Einbettung der Untergruppe G in $Bij(X, X)$ ist.
In Aufgabe 4 von Blatt 2 des letzten Semesters haben Sie gezeigt, daß eine Gruppe auf sich selbst durch Konjugation operiert:

$$\Phi \colon G \longrightarrow Bij(G, G) \quad \text{mit} \quad \Phi(g) := \phi_g \quad \text{und}$$
$$\phi_g \colon G \longrightarrow G \quad \text{mit} \quad \phi_g(h) := ghg^{-1}$$

definieren eine Operation von G auf sich, wobei $\phi_g(h)$ die Konjugation von h mit g genannt wird. Der Orbit eines Elementes $g \in G$ unter dieser Operation heißt die Konjugationsklasse von g in G.

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und $n \in \mathbb{N}$. Dann operiert $\mathrm{GL}(n, R)$ auf $M(n \times n, R)$ durch:

$$\Psi \colon \mathrm{GL}(n, R) \longrightarrow Bij\big(M(n \times n, R), M(n \times n, R)\big) \quad \text{mit} \quad \Psi(C)(A) := CAC^{-1}$$
$$\text{für} \quad C \in \mathrm{GL}(n, R), A \in M(n \times n, R).$$

Man sieht sofort, daß $\Psi(C)$ für jedes $C \in \mathrm{GL}(n, R)$ sogar ein Ringautomorphismus von $M(n \times n, R)$ ist, d.h. daß gilt:

$$C(A + B)C^{-1} = (CAC^{-1}) + (CBC^{-1}) \quad \text{und} \quad C(AB)C^{-1} = (CAC^{-1})(CBC^{-1}).$$

Eine Matrix $B \in M(n \times n, R)$ heißt zu $A \in M(n \times n, R)$ konjugiert, falls B im Orbit von A unter dieser Operation liegt, d.h. wenn es ein $C \in \mathrm{GL}(n, R)$ gibt mit $B = CAC^{-1}$.

Im den folgenden Aufgaben sei B die Gruppe der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen über $\mathbb{F}_3$ aus Aufgabe 4 von Blatt 2.

i.) Sei K ein Köprer, und seien $a, b, c \in K^*$. Zeigen Sie:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{sind konjugiert.}$$

Seien weiter $k, m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$. Zeigen Sie, daß es dann keine Matrix $C \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ gibt mit

$$C \begin{pmatrix} k & n \\ 0 & k \end{pmatrix} C^{-1} = \begin{pmatrix} k & m \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

ii.) Bestimmen Sie die Konjugationsklassen der Gruppe B.

iii.) Bestimmen Sie, welche Matrizen aus B zueinander konjugiert sind.

Hinweis: in Teil ii.) werden die Matrizen aus B nur mit Elementen aus B konjugiert, in Teil iii.) geht es um die Konjugation mit allen Matrizen aus $\mathrm{GL}(n, K)$. Teil i.) und Aussagen zur Diagonalisierbarkeit der Vorlesung können für die letzten beiden Teile nützlich angewandt werden.

Abgabe: 14.03.2011 im Hörsaal zwischen Vorlesung und großer Übung