Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI — Blatt 3
Prof. Dr. Claus Hertling, Ralf Kurbel — 28.02.2011

# Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa/Diskreten Mathematik A

**Aufgabe 1:** (4 Punkte) Berechnen Sie für die folgenden Matrizen ihr charakteristisches Polynom:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}), \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Q}),$$

$$C := \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{F}_5), \qquad D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

**Aufgabe 2:** (2+2 Punkte)
Es seien $f$ und $g$ die folgenden Abbildungen von $M(3 \times 1, \mathbb{Q})$ nach $M(3 \times 1, \mathbb{Q})$:

$$f(x) := Ax \quad \text{und} \quad g(x) := Bx$$

mit Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 18 & -27 \\ 0 & 26 & -36 \\ 0 & 18 & -25 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie $f$ als Matrix bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ und $g$ als Matrix bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ dar, d.h. bestimmen Sie $M(\mathcal{A}, f, \mathcal{A})$ und $M(\mathcal{B}, g, \mathcal{B})$ mit:

$$\mathcal{A} : \left( \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} : \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \right).$$

**Aufgabe 3:** (1+1+2 Punkte) Sei $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Beweisen Sie:

i.) $$0 \text{ Eigenwert von } f \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ nicht injektiv.}$$
(Ohne Punkte: Wenn $V$ endlichdimensional ist, kann „injektiv“ durch „bijektiv“ ersetzt werden. Warum?)

ii.) Sei $f$ invertierbar und $\lambda$ ein Eigenwert von $f$ (nach Teil i.) ist $\lambda \neq 0$). Dann ist $\lambda^{-1}$ ein Eigenwert von $f^{-1}$.

iii.) Seien $\lambda \neq \mu$ Eigenwerte von $f$, und sei $v$ ein Eigenvektor zu $\lambda$ und $w$ ein Eigenvektor zu $\mu$. Dann sind $v$ und $w$ linear unabhängig.

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 4:** (1+2+1 Punkte)
Sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. $f$ heißt nilpotent, wenn ein ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $f^n$ die Nullabbildung ist ($f^n$ ist die $n$-fache Hintereinanderausführung von $f$). Im folgenden sei $f\colon V \longrightarrow V$ nilpotent. Beweisen Sie:

i.) Sei $\lambda$ ein Eigenwert von $f$. Dann ist $\lambda = 0$.

ii.) Sei $v \in V$ mit $v \neq 0$, und es sei $k \in \mathbb{N}$ der kleinste Index mit $f^k(v) = 0$. Dann sind folgende Vektoren linear unabhängig:

$$v, f(v), \ldots, f^{k-1}(v)$$

Ein solches System von Vektoren heißt eine $f$-zyklische Kette mit dem Erzeuger $v$.

iii.) Seien $v_i, f(v_i), \ldots, f^{k_i-1}(v_i)$ für $1 \leq i \leq m$ $f$-zyklische Ketten mit Erzeugern $v_i$. Weiter seien alle Vektoren der Ketten zusammengenommen eine Basis von $V$ (nach Teil ii.) sind die Vektoren einer Kette zueinander linear unabhängig, aber nicht unbedingt Vektoren verschiedener Ketten).
Geben Sie für den Fall $m := 3$ und $k_1 := 1$, $k_2 := 2$ und $k_3 := 3$ die Matrix $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$ bzgl. der folgenden Basis an:

$$\mathcal{B} := \big(v_1, f(v_2), v_2, f^2(v_3), f(v_3), v_3\big)\,.$$

**Abgabe: 07.03.2011 im Hörsaal zwischen Vorlesung und großer Übung**