Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa/Diskreten Mathematik A

Aufgabe 1: (2+2 Punkte)

i.) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes. Dabei soll weder die Matrix noch eine sich ergebende Untermatrix vereinfacht werden, und nur für Untermatrizen der Größe $n \leq 2$ darf eine Determinantenformel benutzt werden.

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Z}).$$

ii.) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix (alle bekannten Verfahren erlaubt):

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{F}_5).$$

Aufgabe 2: (2+2 Punkte)

i.) Bestimmen Sie für folgende Matrix A ihre Komplementärmatrix $A^\sharp$ (Definition 7.13):

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{F}_5).$$

ii.) Berechnen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ über $\mathbb{R}$ mit Hilfe der klassischen Version der Cramerschen Regel aus Korollar 7.17:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte) Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix B:

$$B := t \cdot E_n - A \quad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & & -a_1 \\ & 1 & 0 & & & -a_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ & & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)
Es sei definiert:

$$B := \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \in M(2\times 2, \mathbb{F}_3) \mid \det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \neq 0 \} .$$

i.) Zeigen Sie, daß B eine Untergruppe von $GL(2, \mathbb{F}_3)$ ist, und geben Sie die Elemente von B an.

ii.) Die Determinantenabbildung kann auf B eingeschränkt werden:

$$\phi \colon B \longrightarrow \mathbb{F}_3^* \quad \text{mit} \quad \phi(A) := \det(A).$$

Sei $U := \ker \phi$. U ist dann ein Normalteiler von B. Geben Sie die Quotientengruppe B/U und ihre Verknüpfungstafel an.

Abgabe: 28.02.2011 im Hörsaal zwischen Vorlesung und großer Übung