Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI — Blatt 1
Prof. Dr. Claus Hertling, Ralf Kurbel — 14.02.2011

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa/Diskreten Mathematik A

Aufgabe 1: (4 Punkte) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Hilfe der Formeln aus Beispiel 7.2:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{F}_{11})$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Z}) \qquad D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{F}_5)$$

Aufgabe 2: (4 Punkte) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix aus $M(n \times n, \mathbb{Z})$ mit $a_i, b_j \in \mathbb{Z}$ (leere Felder entsprechen Nullen):

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & -a_1 \\ & 1 & & & -a_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -a_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: (4 Punkte) Satz 7.7 der Vorlesung läßt sich folgendermaßen auf einen kommutativen Ring R mit 1 erweitern:

$$A \in M(n \times n, R) \text{ invertierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad det(A) \in R^*,$$

und R^* ist die Menge der Einheiten in R, der multiplikativ invertierbaren Elemente. Beweisen Sie damit folgenden Aussage:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Z}) \text{ invertierbar} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{ggT}(a, b) = 1.$$

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)

i.) Zeigen Sie, daß es für jedes $n \geq 2$ Matrizen $A_n, B_n \in M(n \times n, \mathbb{R})$ gibt mit

$$\det(A_n + B_n) \neq \det(A_n) + \det(B_n).$$

ii.) Es sei $n \in \mathbb{N}$, und mit π_n sei der kanonische Ringhomomorphismus π_n von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bezeichnet:

$$\pi_n \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad \pi_n(a) := [a]_n.$$

Für eine Matrix $A \in M(k \times k, \mathbb{Z})$ mit $A =: (a_{ij})$ sei $\pi_n(A)$ definiert als die Matrix

$$\pi_n(A) := \big(\pi_n(a_{ij})\big) \in M(k \times k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Zeigen Sie:

$$\det\big(\pi_n(A)\big) = \pi_n\big(\det(A)\big).$$

Abgabe: 21.02.2011 im Hörsaal zwischen Vorlesung und großer Übung