Klausur zur Linearen Algebra IIa (DMA) FSS 2011, 26.08.2011
Universität Mannheim, Prof. Dr. C. Hertling, Ralf Kurbel

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei K ein Körper.
  - Definieren Sie die Determinante einer Matrix $A \in M(n \times n, K)$.
  - Definieren Sie $\mathrm{GL}(n,K)$ und $\mathrm{SL}(n,K)$.

ii.) (2P) Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und ϕ ein Endomorphismus von V.
  - Definieren Sie, was ein Eigenwert und was ein Eigenvektor von ϕ ist.
  - Definieren Sie das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom von ϕ.

iii.) (1P) Geben Sie eine (2×2)-Matrix an, die nicht diagonalisierbar ist.

iv.) (2P) Sei V ein endlichdimensinaler K-Vektorraum, und sei ϕ eine symmetrische Bilinearform auf V.
  - Definieren Sie für zwei Vektoren $v, w \in V$, wann diese orthogonal zueinander heißen. Definieren Sie für ein einen Unterraum $U \subseteq V$ den orthogonalen Untervektorraum $U^\perp$.
  - Definieren Sie das Radikal $\mathrm{Rad}(\phi)$. Definieren Sie, wann ein Vektor $v \in V$ mit $v \neq 0$ isotrop heißt.

v.) (1P) Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und ϕ eine Bilinearform auf V. Wann heißt ϕ ein Skalarprodukt?

Lösung:

i.) (Leibniz-Formel) Die Determinante $\det A$ von $A := (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$ ist definiert durch

$$\det A := \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Weiter ist:

$$\mathrm{GL}(n,K) := \{ A \in M(n \times n, K) \mid \det A \neq 0 \},$$
$$\mathrm{SL}(n,K) := \{ A \in M(n \times n, K) \mid \det A = 1 \}.$$

ii.) Ist V ein K-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$, so heißt $\lambda \in K$ ein Eigenwert von ϕ, wenn es ein $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $\phi(v) = \lambda v$ gibt.
Ein $v \in V$ mit $v \neq 0$ heißt Eigenvektor von ϕ, wenn es ein $\lambda \in K$ gibt mit $\phi(v) = \lambda v$.
Das charakteristische Polynom $P_\phi(t) \in K[t]$ von ϕ ist definiert als

$$P_\phi(t) = \det(t \cdot id - \phi).$$

Das Minimalpolynom $M_\phi(t)$ von ϕ ist definiert als das unitäre (normierte) Polynom kleinsten Grades, welches die Nullabbildung ergibt, wenn ϕ eingesetzt wird. (oder: Das unitäre Polynom kleinsten Grades im Kern des Ringhomomorphismus $\Phi_\phi \colon K[t] \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ mit $\Phi_\phi\big(p(t)\big) := p(\phi)$.)

iii.) Jede Jordannormalform, die einen Block der Größe $k > 1$ enthält, ist nicht diagonalisierbar, also z.B. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dies ist unabhängig vom gewählten Körper. Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist über dem Körper $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar (Drehung im $\mathbb{R}^2$ um $90°$), jedoch über dem Körper $\mathbb{C}$. In so einem Fall muß der Körper angegeben werden, über dem die Matrix nicht diagonalisierbar ist!

Matrikelnummer:

iv.) $v, w \in V$ heißen orthogonal zueinander (bzgl. ϕ), falls gilt: $\phi(v, w) = 0$. Weiter ist für einen Unterraum $U \subseteq V$ definiert:

$$U^{\perp} = \{\, v \in V \mid \phi(v, u) = 0 \text{ für alle } u \in U \,\}.$$

Ein $v \in V$ heißt isotrop, falls $\phi(v, v) = 0$ gilt, und das Radikal $\mathrm{Rad}(\phi)$ ist definiert als:

$$\mathrm{Rad}(\phi) := V^{\perp}.$$

v.) ϕ heißt Skalarprodukt, wenn es symmetrisch (d.h. $\phi(v, w) = \phi(w, v)$ für alle $v, w \in V$) und positiv definit (d.h. $\phi(v, v) > 0$ für alle $v \in V$ mit $v \neq 0$) ist.

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Berechnen Sie die Determinante der folgenden reellen Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 17 & 2 & \pi & -101 \\ 19 & 3 & 22 & 478 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

ii.) (2P+1P+1P) Es sei ϕ ein Endomorphismus des K-Vektorraumes V, ϕ habe die beiden Eigenwerte $\lambda_1 := 1$ und $\lambda_2 := 2$, und es sei $U_i(\lambda_j) := \ker(\phi - \lambda_j \cdot \mathrm{id})^i$. Weiter seien folgende Größen bekannt:

i	1	2	3	4
$\dim_K U_i(1)$	2	4	5	5
$\dim_K U_i(2)$	3	4	5	5

Bestimmen Sie die Jordannormalform von ϕ, sein charakteristisches Polynom $P_\phi(t)$ und sein Minimalpolynom $M_\phi(t)$.

Lösung:

i.) Die Matrix A hat Blockdiagonalgestalt, so daß sich deren Determinante sofort als Produkt der Determinanten der Diagonalblöcke ergibt:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 17 & 2 \\ 19 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} = (51 - 38) \cdot (60 - 44) = 208.$$

ii.) Es wird eine Basis des Vektorraumes gesucht, die aus zyklischen Ketten zu den Abbildungen $\phi - \lambda_j$ gebildet ist: pro zyklischer Kette gibt es einen Jordanblock mit entsprechendem Eigenwert und entsprechender Größe in der Jordannormalform.

Wesentlich ist dabei nur die Anzahl der Ketten und deren jeweilige Länge, da daraus schon die Blockstruktur abgelesen werden kann. Anzahl und Längen der Kette können dabei aus den Filtrierungen

$$\{0\} = U_0(\lambda_j) \subsetneq U_1(\lambda_j) \subsetneq \ldots \subsetneq U_k(\lambda_j) = U_{k+1}(\lambda_j) = V$$

abgelesen werden. Die Differenzen

$$\dim_K U_i(\lambda_j) - \dim_K U_{i-1}(\lambda_j) \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq k$$

geben die eindeutig bestimmte Anzahl der Ketten der Länge $\geq i$ zum Eigenwert λ_j in einer solchen Basis an ($\dim U_1(\lambda_j)$ insbesondere die Anzahl der Ketten zum Eigenwert λ_j), so daß aus diesen Differenzen sukzessive die Ketten aufgebaut werden können: (nächste Seite)

$\lambda_1 = 1$**:**

$$
\begin{array}{rcccccl}
i = 1: & \bullet & \bullet & 2-0 & = & 2 & \text{Ketten der Länge mindestens 1} \\
 & | & | & & & & \\
i = 2: & \bullet & \bullet & 4-2 & = & 2 & \text{Ketten der Länge mindestens 2} \\
 & | & & & & & \\
i = 3: & \bullet & & 5-4 & = & 1 & \text{Kette der Länge mindestens 3} \\
 & & & & & & \\
i = 4: & & & 5-5 & = & 0 & \text{Ketten der Länge mindestens 4} \\
 & & & & & & \\
 & 3 & 2 & & & & \leftarrow \text{Kettenlängen}
\end{array}
$$

$\lambda_2 = 2$**:**

$$
\begin{array}{rccccccl}
i = 1: & \bullet & \bullet & \bullet & 3-0 & = & 3 & \text{Ketten der Länge mindestens 1} \\
 & | & & & & & & \\
i = 2: & \bullet & & & 4-3 & = & 1 & \text{Kette der Länge mindestens 2} \\
 & | & & & & & & \\
i = 3: & \bullet & & & 5-4 & = & 1 & \text{Kette der Länge mindestens 3} \\
 & & & & & & & \\
i = 4: & & & & 5-5 & = & 0 & \text{Ketten der Länge mindestens 4} \\
 & & & & & & & \\
 & 3 & 1 & 1 & & & & \leftarrow \text{Kettenlängen}
\end{array}
$$

Somit enthält die Jordannormalform von ϕ zwei Jordanblöcke zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ mit den Blockgrößen 3 und 2, und drei Jordanblöcke zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$ mit den Blockgrößen 3, 1 und 1.

Das charakteristische Polynom von ϕ kann aus der Jordannormalform abgelesen werden: ein Jordanblock der Größe k zum Eigenwert λ_j steuert zum charakteristischen Polynom den Faktor $(t - \lambda_j)^k$ hinzu. Somit ergibt sich aus den oben angegebenen Blöcken

$$P_\phi(t) = (t-1)^3(t-1)^2(t-2)^3(t-2)(t-2) = (t-1)^5(t-2)^5.$$

Das Minimalpolynom kann ebenso leicht aus der Jordannormalform abgelesen werden: jeder Eigenwert λ_j steuert den Faktor $(t - \lambda_j)^{k_j}$ hinzu, wobei k_j die maximale Blockgröße zu diesem Eigenwert ist. Dann gilt:

$$M_\phi(t) = (t-1)^3(t-2)^3.$$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (5P) Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ -12 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix C an mit

$$C^{-1}AC = D.$$

ii.) (3P) Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix T an mit

$$T^{tr}AT = D.$$

Lösung:

i.) Die Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn $M(3 \times 1, \mathbb{R})$ eine Basis aus Eigenvektoren von A besitzt. Dann enthält die Matrix D die Eigenwerte von A auf ihrer Diagonale, und C besteht aus einer Basis aus Eigenvektoren (wobei der Eigenvektor aus einer Spalte von C zu dem Eigenwert in derselben Spalte von D korrespondieren muß).
Somit besteht die Lösung der Aufgabe darin, folgende Schritte auszuführen:

- Berechne das charakteristische Polynom von A und damit die Eigenwerte von A.
- Berechne die Eigenräume zu den Eigenwerten und Basen daraus.
- Konstruiere C aus den einzelnen Basen.

Es gilt, da A und damit $t \cdot E_3 - A$ Blockdiagonalmatrizen sind:

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} t+7 & -4 & 4 \\ 12 & t-7 & 6 \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} t+7 & -4 \\ 12 & t-7 \end{pmatrix} \cdot (t-1)$$
$$= (t^2 - 49 + 48)(t-1) = (t^2-1)(t-1) = (t-1)^2(t+1).$$

Somit hat A die Eigenwerte $\lambda = \pm 1$, und es müssen nun Basen der Eigenräume zu diesen Eigenwerten gefunden werden:

$\lambda = 1$**:** Es gilt $\mathrm{Eig}(A, 1) = \mathrm{Lös}(A - E_3, 0)$, und es folgt:

$$\begin{array}{ccc|c} -8 & 4 & -4 & 0 \\ -12 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow[Z_I(\frac{1}{6},1)]{Z_I(-\frac{1}{4},2)} \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{Z_{II}(1,1,2)} \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Eig}(A,1) = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y-2x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Matrikelnummer:

$\lambda = -1$**:** Es gilt $\mathrm{Eig}(A,-1) = \mathrm{Lös}(A + E_3, 0)$, und es folgt:

$$\begin{array}{ccc|c} -6 & 4 & -4 & 0 \\ -12 & 8 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \xrightarrow{Z_{II}(-2,1,2)} \begin{array}{ccc|c} -6 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \xrightarrow[\substack{Z_I(\frac{1}{2},1) \\ Z_I(\frac{1}{2},2)}]{Z_{II}(-1,2,3)} \begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Eig}(A,-1) = \{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Es ergibt sich als mögliche Lösung:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

ii.) Die Matrix A wird sukzessive durch Gauß-Zeilen-/Spaltenoperation zu einer Diagonalmatrix D umgeformt, wobei nach einer Zeilenoperation $Z_{II}(\lambda, i, j)$ sofort die analoge Spaltenoperation $S_{II}(\lambda, i, j)$ durchgeführt wird. Zusätzlich werden die durchgeführten Spaltenoperation auf die Einheitsmatrix angewandt, um die Basistransformationsmatrix T zu erhalten. Schematisch bedeutet dies:

$$A|E_3 \quad \xrightarrow[S_{II}(\lambda_1,1,2)=:S_1]{Z_{II}(\lambda_1,1,2)=:Z_1} \quad Z_1AS_1|E_3S_1 \quad \longrightarrow \ldots \longrightarrow \quad D|T$$

Bei der folgenden Umformung von $A|E_3$ werden die Zeilenoperation nur auf die linke Tafel angewandt, die Spaltenoperation auf beide Tafeln (somit entsteht ein Zwischenschritt zum obigen Schema, so daß nach jeweils zwei Umformungen ein obiger Schritt vollzogen ist):

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{Z_{II}(-2,1,2)} \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{S_{II}(-2,1,2)}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{Z_{II}(3,1,3)} \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{S_{II}(3,1,3)}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{Z_{II}(2,2,3)} \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{S_{II}(2,2,3)}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

i.) (2P) Zeigen Sie, daß die Spalten von A linear unabhängig sind und damit eine Basis von $M(3 \times 1, \mathbb{R})$.

ii.) (4P) Überführen Sie diese Basis mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren in eine Orthonormalbasis bzgl. des Standard-Skalarproduktes.

iii.) (2P) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung von A.

Lösung:

i.) Für die Matrix A gilt:

$$\text{Spalten von } A \text{ l.u.} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{rang}(A) = 3.$$

Natürlich reicht die Überprüfung eines Kriteriums, und hier wird nun die Determinante von A bestimmt.

$$\det A \overset{S_{II}(1,1,2)}{=} \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \overset{Z_{II}(-2,1,2)}{=} \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{Laplace} \\ \text{2. Spalte}}}{=} (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = 20 \neq 0.$$

ii.) Die Spalten von A seien mit a_1, a_2, a_3 bezeichnet; diese Basis wird nun mit dem Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren in eine orthogonale Basis b_1, b_2, b_3 umgewandelt, und danach normiert zu einer orthonormalen Basis c_1, c_2, c_3. Der Schritt von den a_i zu den b_i wird beschrieben durch:

$$b_1 := a_1, \quad b_2 := a_2 - s_{12} b_1, \quad b_3 := a_3 - s_{13} b_1 - s_{23} b_2 \quad \text{mit} \quad s_{ij} := \frac{\langle b_i, a_j \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle}.$$

Schrittweise Berechnung führt zu:

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow s_{12} = -1 \Longrightarrow b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} s_{13} & = & \frac{2}{3} \\ s_{23} & = & -1 \end{matrix} \Longrightarrow b_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Der Schritt von den b_i zu den c_i ist das Normieren der b_i, d.h.

$$c_i := \frac{1}{\|b_i\|} b_i \quad \text{mit} \quad \|b_i\| = \sqrt{\langle b_i, b_i \rangle}.$$

Es ergibt sind dann als Orthonormalbasis c_1, c_2, c_3:

$$\begin{matrix} \|b_1\| & = & \sqrt{30} \\ \|b_2\| & = & \sqrt{5} \\ \|b_3\| & = & \frac{1}{3}\sqrt{24} = \frac{2}{3}\sqrt{6} \end{matrix} \Longrightarrow c_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}, \; c_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \; c_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

iii.) Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert mit seinen Koeffizienten s_{ij} die folgende Zerlegung von A:

$$A = OS \quad \text{mit} \quad O := \begin{pmatrix} | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S := \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} \\ & 1 & s_{23} \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

(die Spalten von O sind die orthogonalen Basisvektoren b_i aus Teil ii.).)
Natürlich gilt dann $A = ODD^{-1}S$ für jede invertierbare Matrix D, und wird D als Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $\frac{1}{\|b_i\|}$ gewählt, liefert dies die QR-Zerlegung von A:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}}_{=O} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\|b_1\|} & & \\ & \frac{1}{\|b_2\|} & \\ & & \frac{1}{\|b_3\|} \end{pmatrix}}_{=D} \underbrace{\begin{pmatrix} \|b_1\| & & \\ & \|b_2\| & \\ & & \|b_3\| \end{pmatrix}}_{=D^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} \\ & 1 & s_{23} \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{=S}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}}_{=OD=:Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \|b_1\| & \|b_1\|s_{12} & \|b1\|s_{13} \\ & \|b_2\| & \|b_2\|s_{23} \\ & & \|b_3\| \end{pmatrix}}_{=D^{-1}S=:R}.$$

Hierbei sind die Spalten von Q genau die Orthonormalbasis c_1, c_2, c_3 aus Teil ii.). Alle Werte eingesetzt ergibt dann endgültig:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{30} & -\sqrt{30} & \frac{2}{3}\sqrt{30} \\ & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ & & \frac{2}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix}}_{R}.$$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 25 & 12 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Jordannormalform J_A von A und eine invertierbare reelle Matrix C mit $C^{-1}AC = J_A$.

ii.) (2P+2P) Es sei folgende Bilinearform gegeben:

$$\phi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \phi\big((x_1, x_2), (y_1, y_2) \big) := x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2.$$

Weiter sei $\mathcal{E}_2$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie $M(\mathcal{E}_2, \phi, \mathcal{E}_2)$ und $\mathrm{Rad}(\phi)$.

Lösung:

i.) Das charakteristische Polynom $P_A(t)$ von A ist:

$$\det \begin{pmatrix} t+8 & 4 \\ -25 & t-12 \end{pmatrix} = (t+8)(t-12) + 100 = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2.$$

$P_A(t)$ zerfällt in Linearfaktoren, somit existiert eine Jordannormalform J_A von A, und es gibt nur den einen Eigenwert $\lambda = 2$ von A. Dann ist $M(2 \times 1, \mathbb{R}) = \mathrm{Hau}(A, 2)$, d.h. der Hauptraum zum Eigenwert 2 ist schon der gesamte Raum und $\dim \mathrm{Hau}(A, 2) = 2$.
Die beiden möglichen Jordannormalformen von A sind somit

$$\begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix} = 2E_2 \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix}.$$

Aus $C^{-1}AC = J_A \iff A = CJ_AC^{-1}$ folgt wegen $C(2E_2)C^{-1} = 2E_2$ für jedes $C \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ und $A \neq 2E_2$ dann $J_A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{smallmatrix}\right)$.
Der Raum $M(2 \times 1, \mathbb{R})$ hat somit eine Basis, die aus einer $(A - 2E_2)$-zyklischen Kette der Länge 2 besteht, und ein Startvektor dieser Kette ist ein Vektor aus $M(2 \times 1, \mathbb{R}) = \mathrm{Hau}(A, 2) \setminus \ker(A - 2E_2)$. Somit muß $\ker(A - 2E_2)$ bestimmt werden, was durch eine einfache Zeilenoperation schnell erledigt ist:

$$\ker(A - 2E_2) = \ker \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 25 & 10 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -2x \\ 5x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eine $(A - 2E_2)$-zyklische Kette der Länge 2 ergibt sich dann mit:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Hau}(A, 2) \setminus \ker(A - 2E_2) \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2, \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix} = (A - 2E_2)e_2.$$

Die gesuchte Basiswechselmatrix C mit $C^{-1}AC = J_A$ hat dann diese Kette in umgedrehter Reihenfolge als Spalten, und es folgt:

$$C := \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrikelnummer:

ii.) Die Matrix $M(\mathcal{E}_2, \phi, \mathcal{E}_2) := (a_{ij}) \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ wird gebildet durch die Vorschrift:

$$a_{ij} := \phi(e_i, e_j) \quad \text{mit} \quad i, j \in \{1, 2\} \quad \text{und} \quad e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich sofort durch das Einsetzen der Standardbasisvektoren in die Bilinearform ϕ:

$$M(\mathcal{E}, \phi, \mathcal{E}) := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Das Radikal von ϕ ergibt sich als Lösungsraum von $M(\mathcal{E}, \phi, \mathcal{E})x = 0$, also

$$\mathrm{Rad}\phi = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (3P) Es sei (V, ϕ) ein euklidischer Vektorraum, und es seien $v, w \in V$ mit $v, w \neq 0$. Zeigen Sie:

$$v \perp w \quad \Longrightarrow \quad v \text{ und } w \text{ sind linear unabhängig.}$$

ii.) (3P) Es sei ϕ ein Endomorphismus des K-Vektorraumes V, und ϕ habe die Eigenwerte $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$. Zeigen Sie: Ist $v \neq 0$ ein Eigenvektor zu λ und $w \neq 0$ ein Eigenvektor zu μ, so sind v und w linear unabhängig zueinander.

iii.) (2P) Sei K ein Körper. Zeigen Sie für $A \in M(n \times n, K)$:

$$\det(A) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad A \text{ invertierbar.}$$

Lösung:

i.) Es ist zu zeigen:

$$\alpha v + \beta w = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0.$$

Es folgt sofort wegen $\phi(v, w) = 0$ und $\phi(v, v) \neq 0$:

$$0 = \phi(v, 0) = \phi(v, \alpha v + \beta w) = \alpha \phi(v, v) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 0.$$

Dann ist wegen $\beta w = 0$ und $w \neq 0$ auch $\beta = 0$. (Diese Beweisidee kann per Induktion leicht auf den Fall von paarweise orthogonalen Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ übertragen werden.)

ii.) Es ist zu zeigen:

$$\alpha v + \beta w = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0.$$

Auf die obige Linearkombination kann die Abbildung ϕ angewendet werden, und es folgt:

$$0 = \alpha v + \beta w \quad \Longrightarrow \quad 0 = f(0) = f(\alpha v + \beta w) = \lambda \alpha v + \mu \beta w.$$

Ebenso kann obige Linearkombination mit λ multipliziert werden, und werden beide Gleichungen dann voneinander abgezogen, so folgt:

$$\lambda \alpha v + \mu \beta w = 0, \quad \lambda \alpha v + \lambda \beta w = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\mu - \lambda)\beta w = 0.$$

Aus $\mu \neq \lambda$ und $w \neq 0$ folgt dann $\beta = 0$, und aus $\alpha v = 0$ und $v \neq 0$ auch $\alpha = 0$. (Diese Beweisidee kann per Induktion leicht auf den Fall von n paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ausgeweitet werden.)

iii.) Für alle Matrizen $A \in M(n \times n, K)$ gilt nach Satz 7.15.c):

$$A^\sharp \cdot A = \det(A) \cdot E_n.$$

Ist nun $\det(A) \neq 0$, so kann diese Gleichung durch $\det(A) \in K^*$ geteilt werden, und es folgt:

$$(\frac{1}{\det(A)} \cdot A^\sharp) \cdot A = E_n.$$

Somit besitzt A eine inverse Matrix (nämlich $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^\sharp$).

Matrikelnummer: