Klausur zur Linearen Algebra IIa (DMA) FSS 2011, 26.08.2011
Universität Mannheim, Prof. Dr. C. Hertling, Ralf Kurbel

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei K ein Körper.
- Definieren Sie die Determinante einer Matrix $A \in M(n \times n, K)$.
- Definieren Sie $\mathrm{GL}(n, K)$ und $\mathrm{SL}(n, K)$.

ii.) (2P) Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und ϕ ein Endomorphismus von V.
- Definieren Sie, was ein Eigenwert und was ein Eigenvektor von ϕ ist.
- Definieren Sie das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom von ϕ.

iii.) (1P) Geben Sie eine (2×2)-Matrix an, die nicht diagonalisierbar ist.

iv.) (2P) Sei V ein endlichdimensinaler K-Vektorraum, und sei ϕ eine symmetrische Bilinearform auf V.
- Definieren Sie für zwei Vektoren $v, w \in V$, wann diese orthogonal zueinander heißen. Definieren Sie für ein einen Unterraum $U \subseteq V$ den orthogonalen Untervektorraum $U^{\perp}$.
- Definieren Sie das Radikal $\mathrm{Rad}(\phi)$. Definieren Sie, wann ein Vektor $v \in V$ mit $v \neq 0$ isotrop heißt.

v.) (1P) Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und ϕ eine Bilinearform auf V. Wann heißt ϕ ein Skalarprodukt?

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Berechnen Sie die Determinante der folgenden reellen Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 17 & 2 & \pi & -101 \\ 19 & 3 & 22 & 478 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

ii.) (2P+1P+1P) Es sei ϕ ein Endomorphismus des K-Vektorraumes V, ϕ habe die beiden Eigenwerte $\lambda_1 := 1$ und $\lambda_2 := 2$, und es sei $U_i(\lambda_j) := \ker(\phi - \lambda_j \cdot \mathrm{id})^i$. Weiter seien folgende Größen bekannt:

i	1	2	3	4
$\dim_K U_i(1)$	2	4	5	5
$\dim_K U_i(2)$	3	4	5	5

Bestimmen Sie die Jordannormalform von ϕ, sein charakteristisches Polynom $P_\phi(t)$ und sein Minimalpolynom $M_\phi(t)$.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (5P) Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ -12 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix C an mit

$$C^{-1}AC = D.$$

ii.) (3P) Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix T an mit

$$T^{tr}AT = D.$$

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

i.) (2P) Zeigen Sie, daß die Spalten von A linear unabhängig sind und damit eine Basis von $M(3 \times 1, \mathbb{R})$.

ii.) (4P) Überführen Sie diese Basis mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren in eine Orthonormalbasis bzgl. des Standard-Skalarproduktes.

iii.) (2P) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung von A.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 25 & 12 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Jordannormalform J_A von A und eine invertierbare reelle Matrix C mit $C^{-1}AC = J_A$.

ii.) (2P+2P) Es sei folgende Bilinearform gegeben:

$$\phi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \phi\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) := x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2.$$

Weiter sei $\mathcal{E}_2$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie $M(\mathcal{E}_2, \phi, \mathcal{E}_2)$ und $\mathrm{Rad}(\phi)$.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (3P) Es sei (V, ϕ) ein euklidischer Vektorraum, und es seien $v, w \in V$ mit $v, w \neq 0$. Zeigen Sie:

$$v \perp w \quad \Longrightarrow \quad v \text{ und } w \text{ sind linear unabhängig.}$$

ii.) (3P) Es sei ϕ ein Endomorphismus des K-Vektorraumes V, und ϕ habe die Eigenwerte $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda \neq \mu$. Zeigen Sie: Ist $v \neq 0$ ein Eigenvektor zu λ und $w \neq 0$ ein Eigenvektor zu μ, so sind v und w linear unabhängig zueinander.

iii.) (2P) Sei K ein Körper. Zeigen Sie für $A \in M(n \times n, K)$:

$$\det(A) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad A \text{ invertierbar.}$$

Matrikelnummer: