Klausur zur Linearen Algebra IIa (DMA) FSS 2011, 29.04.2011
Universität Mannheim, Prof. Dr. C. Hertling, Ralf Kurbel

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und ϕ ein Skalarprodukt auf V, d.h. (V, ϕ) ist ein euklidischer Vektorraum.
- Definieren Sie die Länge $\|x\|$ eines Vektors $x \in V$, und den Abstand $d(x, y)$ zweier Vektoren $x, y \in V$ zueinander.
- Geben Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für $x, y \in V$ an.

ii.) (2P) Sei K ein Körper, und seien $A, B \in M(n \times n, K)$. Vervollständigen Sie die folgenden Aussagen, in dem Sie das Fragezeichen (?) geeignet ersetzen:

$$\begin{array}{rcl} \det(A) \cdot \det(B) & = & ? \\ A \text{ invertierbar} & \Longleftrightarrow & \det(A) \quad ? \\ A \cdot A^{\sharp} & = & ? \\ \det(A) & \in & ? \end{array}$$

iii.) (1P) Formulieren Sie den Satz von Cayley-Hamilton für einen Endomorphismus ϕ eines endlichdimensionalen K-Vektorraumes V.

iv.) (1P) Sei ϕ ein Endomorphismus des K-Vektorraumes V. Definieren Sie, wann ϕ nilpotent genannt wird.

v.) (2P) Sei K ein Körper. Geben Sie zwei äquivalente Bedingungen/Definitionen dafür an, daß $A \in M(n \times n, K)$ diagonalisierbar ist.

Lösung:

i.)
- $$\|x\| := \sqrt{\phi(x, x)} \quad \text{und} \quad d(x, y) := \|x - y\|.$$
- $$|\phi(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

ii.)

$$\begin{array}{rcl} \det(A) \cdot \det(B) & = & \det(A \cdot B) \\ A \text{ invertierbar} & \Longleftrightarrow & \det(A) \neq 0 \\ A \cdot A^{\sharp} & = & \det(A) \cdot E_n \\ \det(A) & \in & K \end{array}$$

iii.) $P_\phi(\phi) = 0 \in \operatorname{End}_K(V)$.

iv.) $\phi \in \operatorname{End}_K(V)$ heißt nilpotent, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $\phi^k = 0 \in \operatorname{End}_K(V)$.

v.) Alle der folgenden Aussagen sind äquivalent dazu, daß A diagonalisierbar ist; die Nennung von zweien wäre somit eine Lösung der Aufgabe:
- Es gibt eine Basis von $M(n \times 1, K)$ aus Eigenvektoren von A.
- Es gibt ein $B \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit: $B^{-1}AB = \text{Diagonalmatrix}$
- Es gibt Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ von A mit
$$n = \sum_{i=1}^{k} \dim_K \operatorname{Eig}(A, \lambda_i).$$
- A besitzt eine Jordannormalform mit lauter Jordanblöcken der Größe 1.
- A besitzt eine Jordannormalform, und für jeden Eigenwert ist der Hauptraum gleich dem Eigenraum.

Dabei ist die Aussage, daß A eine Jordannormalform besitzt, äquivalent zu: $P_A(t)$ zerfällt über K in Linearfaktoren.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix über $\mathbb{F}_5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{F}_5).$$

Geben Sie das Ergebnis als Element von $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ an.

ii.) (2+1+1P) Es sei ϕ ein nilpotenter Endomorphismus des K-Vektorraumes V, und es sei $U_i := \ker(\phi^i)$. Es seien folgende Größen bekannt:

i	1	2	3	4	5	6	7
$\dim_K U_i$	5	9	12	14	16	17	17

Bestimmen Sie die Jordannormalform von ϕ, sein charakteristisches Polynom $P_\phi(t)$ und sein Minimalpolynom $M_\phi(t)$.

Lösung:

i.) Die Matrix läßt sich durch Gauß-Zeilenoperationen schnell in obere Dreiecksform überführen:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_{II}(1,1,2) \\ Z_{II}(3,1,3) \\ Z_{II}(4,1,4)}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z_{III}(2,4)}{=} \underbrace{4}_{=[-1]_5} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 4 \cdot 2 = 3.$$

(Alle Rechnungen sind in $\mathbb{F}_5$ ausgeführt.)

ii.) Aus der Filtrierung $\{0\} = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \ldots \subsetneq U_k = U_{k+1} = V$ kann abgelesen werden, wie eine Basis aus ϕ-zyklischen Ketten aussehen muß (Anzahl und Länge der Ketten). Die Differenzen

$$\dim_K U_i - \dim_K U_{i-1} \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq k$$

geben die eindeutig bestimmte Anzahl der Ketten der Länge $\geq i$ in einer solchen Basis an ($\dim U_1$ insbesondere die Anzahl der Ketten), so daß aus diesen Differenzen sukzessive die Ketten aufgebaut werden können:

Matrikelnummer:

$i = 1:$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$5 - 0$	$=$	5	Ketten der Länge mindestens 1
$i = 2:$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$		$9 - 5$	$=$	4	Ketten der Länge mindestens 2
$i = 3:$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$			$12 - 9$	$=$	3	Ketten der Länge mindestens 3
$i = 4:$	$\bullet$	$\bullet$				$14 - 12$	$=$	2	Ketten der Länge mindestens 4
$i = 5:$	$\bullet$	$\bullet$				$16 - 14$	$=$	2	Ketten der Länge mindestens 5
$i = 6:$	$\bullet$					$17 - 16$	$=$	1	Kette der Länge mindestens 6
$i = 7:$						$17 - 17$	$=$	0	Ketten der Länge 7
	6	5	3	2	1				$\leftarrow$ Kettenlängen

Die Anzahl und Größe der Jordanblöcke entspricht der Anzahl und Länge der Ketten, so daß die Jordannormalform von ϕ insgesamt fünf Jordanblöcke enthält (mit dem Diagonalelement/Eigenwert 0), und die Blöcke haben die Größen 6, 5, 3, 2 und 1 (die Anordnung der Blöcke ist nicht vorgeschrieben).

Für das charakteristische Polynom gilt $P_\phi(t) = t^{17}$: Das charakteristische Polynom von ϕ ist gleich dem charakteristischen Polynom seiner Jordannormalform. Die Jordannormalform ist eine 17×17-Matrix, denn die Summe der Jordanblockgrößen ist gleich $6+5+3+2+1 = 17$. Als 17×17-obere-Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonale hat die Jordannormalform dann das charakteristisches Polynom t^{17}.

Für das Minimalpolynom gilt $M_\phi(t) = t^6$: Nach Cayley-Hamilton ist das Minimalpolynom von ϕ ein Teiler seines charakteristischen Polynoms, welches t^{17} ist; also muß $M_\phi(t)$ die Form t^k für ein geeingnetes k haben. Gesucht ist somit das minimale k, so daß ϕ^k die Nullabbildung auf V ist.
Die ϕ-zyklischen Ketten bilden eine Basis von V, und eine Abbildung ist genau dann die Nullabbildung auf dem ganzen Raum, wenn sie eine Basis auf die Null abbildet. Das Bild eines Gliedes einer ϕ-zyklischen Kette ist das nächste Glied dieser Kette oder Null (die Kettenenden liegen alle im Kern von ϕ), und somit ist k offensichtlich die Länge der längsten ϕ-zyklischen Kette, in diesem Fall also $k = 6$.

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} -4 & 8 & 12 \\ 8 & -16 & -24 \\ 12 & -24 & -34 \end{pmatrix}.$$

i.) (4P) Bestimmen Sie eine invertierbare reelle Matrix T, so daß gilt:

$$T^{tr} A T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

ii.) (2P) Bestimmen Sie eine invertierbare reelle Matrix S, so daß gilt:

$$S^{tr} A S = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\} \quad \text{und} \quad \varepsilon_i \geq \varepsilon_{i+1}.$$

iii.) (2P) Sei $\phi := \mathrm{Bil}_A$ die durch A definierte Bilinearform auf $M(3 \times 1, \mathbb{R})$. Bestimmen Sie ein $x \in M(3 \times 1, \mathbb{R})$ mit:

$$x \in \mathrm{Rad}(\phi) \quad \text{und} \quad x \neq 0.$$

Lösung:

i.) Die Matrix A wird sukzessive durch Gauß-Zeilen-/Spaltenoperation zu einer Diagonalmatrix D mit Diagonalelementen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ umgeformt, wobei nach einer Zeilenoperation $Z_{II}(\lambda, i, j)$ sofort die analoge Spaltenoperation $S_{II}(\lambda, i, j)$ durchgeführt wird. Zusätzlich werden die durchgeführten Spaltenoperation auf die Einheitsmatrix angewandt, um die Basistransformationsmatrix T zu erhalten. Schematisch bedeutet dies:

$$A|E_3 \xrightarrow[S_{II}(\lambda_1,1,2)=:S_1]{Z_{II}(\lambda_1,1,2)=:Z_1} Z_1 A S_1 | E_3 S_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow D|T$$

Bei der folgenden Umformung von $A|E_3$ werden die Zeilenoperation nur auf die linke Tafel angewandt, die Spaltenoperation auf beide Tafeln (somit entsteht ein Zwischenschritt zum obigen Schema, so daß nach jeweils zwei Umformungen ein obiger Schritt vollzogen ist):

$$\left.\begin{matrix} -4 & 8 & 12 \\ 8 & -16 & -24 \\ 12 & -24 & -34 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{Z_{II}(2,1,2)} \left.\begin{matrix} -4 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & -24 & -34 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{S_{II}(2,1,2)}$$

$$\left.\begin{matrix} -4 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & -34 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{Z_{II}(3,1,3)} \left.\begin{matrix} -4 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{S_{II}(3,1,3)}$$

$$\left.\begin{matrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} \alpha_1 & = & -4 \\ \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_3 & = & 2 \end{matrix} \quad \text{und} \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrikelnummer:

ii.) Die Spalten-Vektoren t_1, t_2, t_3 von T liefern eine Basis (t_1, t_2, t_3), bzgl. derer die Bilinearform Bil_A die obige Diagonalmatrizenform mit den Diagonaleinträgen α_i hat (dabei ist der (i, j)-te Eintrag von Bil_A bzgl. dieser Basis gleich $\phi(t_i, t_j)$). Werden in der Basis-Spalten vertauscht, so vertauschen sich offensichtlich analog die Diagonaleinträge, und wird ein Basisvektor mit dem Faktor λ multipliziert, so werden die Diagonaleinträge wegen $\phi(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 \phi(x, x)$ mit λ^2 multipliziert.

Somit hat Bil_A bzgl. der Basis $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} t_3, t_2, \frac{1}{2} t_1\right)$ Diagonalgestalt mit den Diagonalelementen $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$ und $\varepsilon_3 = -1$, und die Basiswechselmatrix S hat dann die Form:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

iii.) Es werden hier zwei Lösungsansätze gezeigt, um ein x mit $\phi(x, y) = \phi(y, x) = 0$ für alle y zu finden, also z.B. $y^{tr} A x = 0$ für alle y wegen $\phi = \mathrm{Bil}_A$.

- Offensichtlich erfüllt jedes $x \in \ker(A)$ die Bedingung $x \in \mathrm{Rad}(\phi)$ wegen $y^{tr} A x = y^{tr} 0 = 0$, so daß nur ein $x \neq 0$ aus dem Kern von A berechnet werden muß. Oder eine Lösung wird konstruiert: da zweimal die erste Spalte minus die zweiten Spalte von A gleich 0 ist, liegt offensichtlich $x = (2, 1, 0)^{tr}$ in $\ker(A)$.
- Ein weiterer Weg wäre, die vorherigen Gleichungen $A = T^{tr} A T = S^{tr} A S$ zu nutzen, denn für die Diaganalmatrix D aus Teil i.) gilt offensichtlich mit dem Standardbasisvektor e_2 für jedes y:

$$(T^{-1} y)^{tr} D e_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (T^{-1} y)^{tr} \underbrace{T^{tr} A T}_{=D} e_2 = 0 \quad (\text{setze } x := T e_2)$$
$$\Longrightarrow \quad (T T^{-1} y)^{tr} A x = y^{tr} A x = 0.$$

Somit ist $T e_2$, die zweite Spalt von T, ein passender Vektor. Er ist gleich der vorher konstruierten Lösung $(2, 1, 0)^{tr}$.

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

i.) (2P) Zeigen Sie, daß die Spalten von A linear unabhängig sind und damit eine Basis von $M(3 \times 1, \mathbb{R})$.

ii.) (4P) Überführen Sie diese Basis mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren in eine Orthonormalbasis bzgl. des Standard-Skalarproduktes.

iii.) (2P) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung von A.

Lösung:

i.) Für die Matrix A gilt:

$$\text{Spalten von } A \text{ l.u.} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{rang}(A) = 3.$$

Natürlich reicht die Überprüfung eines Kriteriums, und hier wird nun die Determinante von A bestimmt. Dabei wird die Matrix A mit Gauß-Zeilenoperationen in eine obere Block-Dreiecksform gebracht, aus der die Determinante schnell berechnet werden kann; es gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix} \overset{Z_{II}(-2,1,2)}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix} = 1 \cdot (\ (-5) \cdot (-6) - (-1) \cdot 0\ ) = 30.$$

ii.) Die Spalten von A seien mit a_1, a_2, a_3 bezeichnet; diese Basis wird nun mit dem Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren in eine orthogonale Basis b_1, b_2, b_3 umgewandelt, und danach normiert zu einer orthonormalen Basis c_1, c_2, c_3. Der Schritt von den a_i zu den b_i wird beschrieben durch:

$$b_1 := a_1, \quad b_2 := a_2 - s_{12} b_1, \quad b_3 := a_3 - s_{13} b_1 - s_{23} b_2 \quad \text{mit} \quad s_{ij} := \frac{\langle b_i, a_j \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle}.$$

Schrittweise Berechnung führt zu:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow s_{12} = 2 \Longrightarrow b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} s_{13} & = & -1 \\ s_{23} & = & 1 \end{array} \Longrightarrow b_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Der Schritt von den b_i zu den c_i ist das Normieren der b_i, d.h.

$$c_i := \frac{1}{\|b_i\|} b_i \quad \text{mit} \quad \|b_i\| = \sqrt{\langle b_i, b_i \rangle}.$$

Es ergibt sind dann als Orthonormalbasis c_1, c_2, c_3:

$$\begin{array}{rcl} \|b_1\| & = & \sqrt{5} \\ \|b_2\| & = & \sqrt{6} \\ \|b_3\| & = & \sqrt{30} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \ c_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \ c_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

iii.) Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert mit seinen Koeffizienten s_{ij} die folgende Zerlegung von A:

$$A = OS \quad \text{mit} \quad O := \begin{pmatrix} | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S := \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} \\ & 1 & s_{23} \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

(die Spalten von O sind die orthogonalen Basisvektoren b_i aus Teil ii.).)
Natürlich gilt dann $A = ODD^{-1}S$ für jede invertierbare Matrix D, und wird D als Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $\frac{1}{\|b_i\|}$ gewählt, liefert dies die QR-Zerlegung von A:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}}_{=O} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\|b_1\|} & & \\ & \frac{1}{\|b_2\|} & \\ & & \frac{1}{\|b_3\|} \end{pmatrix}}_{=D} \underbrace{\begin{pmatrix} \|b_1\| & & \\ & \|b_2\| & \\ & & \|b_3\| \end{pmatrix}}_{=D^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} \\ & 1 & s_{23} \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{=S}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}}_{=OD=:Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \|b_1\| & \|b_1\| s_{12} & \|b1\| s_{13} \\ & \|b_2\| & \|b_2\| s_{23} \\ & & \|b_3\| \end{pmatrix}}_{=D^{-1}S=:R}.$$

Hierbei sind die Spalten von Q genau die Orthonormalbasis c_1, c_2, c_3 aus Teil ii.). Alle Werte eingesetzt ergibt dann endgültig:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ & \sqrt{6} & \sqrt{6} \\ & & \sqrt{30} \end{pmatrix}}_{R}.$$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Jordannormalform J_A von A und eine invertierbare reelle Matrix C mit $C^{-1}AC = J_A$.

ii.) (1+3P) Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß B eine positiv definite Matrix ist.
Sei $\phi := \mathrm{Bil}_B$ das durch B definierte Skalarprodukt (B ist symmetrisch und positiv definit) im $\mathbb{R}^2$. Dann ist $(\mathbb{R}^2, \phi)$ ein euklidischer Vektorraum. Bestimmen Sie alle Punkte (x, y) in diesem Raum, die auf einer Koordinatenachse liegen ($x = 0$ oder $y = 0$) und die Länge 1 haben.

Lösung:

i.) Das charakteristische Polynom $P_A(t)$ von A ist:

$$\det \begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ -9 & -4-t \end{pmatrix} = (2-t)(-4-t) + 9 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2.$$

$P_A(t)$ zerfällt in Linearfaktoren, somit existiert eine Jordannormalform J_A von A, und es gibt nur den einen Eigenwert $\lambda = -1$ von A. Dann ist $M(2\times 1, \mathbb{R}) = \mathrm{Hau}(A, -1)$, d.h. der Hauptraum zum Eigenwert -1 ist schon der gesamte Raum und $\dim \mathrm{Hau}(A, -1) = 2$.
Die beiden möglichen Jordannormalformen von A sind somit

$$\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = -E_2 \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{pmatrix}.$$

Aus $C^{-1}AC = J_A \iff A = CJ_AC^{-1}$ folgt wegen $C(-E_2)C^{-1} = -E_2$ für jedes $C \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ und $A \neq -E_2$ dann $J_A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
Der Raum $M(2\times 1, \mathbb{R})$ hat somit eine Basis, die aus einer $(A+E_2)$-zyklischen Kette der Länge 2 besteht, und ein Startvektor dieser Kette ist ein Vektor aus $M(2 \times 1, \mathbb{R}) = \mathrm{Hau}(A, -1) \setminus \ker(A + E_2)$. Somit muß $\ker(A + E_2)$ bestimmt werden, was durch eine einfache Zeilenoperation schnell erledigt ist:

$$\ker(A + E_2) = \ker \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eine $(A + E_2)$-zyklische Kette der Länge 2 ergibt sich dann mit:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Hau}(A, -1) \setminus \ker(A + E_2) \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = (A + E_2)e_2.$$

Die gesuchte Basiswechselmatrix C mit $C^{-1}AC = J_A$ hat dann diese Kette in umgedrehter Reihenfolge als Spalten, und es folgt:

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{pmatrix}.$$

Matrikelnummer:

ii.) Mit dem Hauptminorenkriterium (Satz 10.24) kann sofort überprüft werden, ob die Matrix B positiv definit ist:

$$\det(1) = 1 > 0 \text{ und } \det B = 5 - 4 = 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad B \text{ positiv definit.}$$

Gesucht sind nun die Vektoren $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|(x, y)\| = 1$ und $x = 0$ oder $y = 0$ ((x, y) soll auf einer Koordinatenachse liegen).
Für die Länge eines Vektors (x, y) bzgl. des durch B induzierten Skalarproduktes $\phi := \mathrm{Bil}_B$ gilt:

$$\|(x, y)\|_\phi = \sqrt{(x, y) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \sqrt{(x, y) \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + 5y \end{pmatrix}} = \sqrt{x^2 + 4xy + 5y^2}.$$

Daraus folgt dann sofort:

$$\|(x, y)\|_\phi = 1 \text{ und } x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{5y^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad 5y^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\tfrac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\|(x, y)\|_\phi = 1 \text{ und } y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Dies ergibt zusammengesetzt vier Lösungspunkte:

$$(x, y) \in \left\{(0, -\tfrac{1}{\sqrt{5}}), (0, \tfrac{1}{\sqrt{5}}), (-1, 0), (1, 0)\right\}.$$

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (3P) Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Für $A, B \in M(n \times n, K)$ sei eine Relation $\sim$ definiert durch:

$$A \sim B \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists C \in \mathrm{GL}(n,K) \colon CAC^{-1} = B.$$

Zeigen Sie, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M(n \times n, R)$ ist.

ii.) (3P) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ und $P_A(t)$ das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie, daß für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \quad \Longleftrightarrow \quad P_A(\lambda) = 0.$$

iii.) (2P) Sei K ein Körper. Zeigen Sie für $A \in M(n \times n, K)$:

$$A \text{ invertierbar} \quad \Longrightarrow \quad \det(A) \neq 0.$$

Lösung:

i.) Eine Äquivalenzrelation hat folgende drei Eigenschaften: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität. Diese sind nachzuprüfen.

- $\sim$ ist reflexiv, $A \sim A$: Zu zeigen ist, daß es ein $C \in \mathrm{GL}(n,K)$ gibt mit $CAC^{-1} = A$; dies ist mit $C := E_n$ erfüllt.
- $\sim$ ist symmetrisch, $A \sim B \implies B \sim A$: Zu zeigen ist, daß aus $CAC^{-1} = B$ mit $C \in \mathrm{GL}(n,K)$ die Existenz eines $D \in \mathrm{GL}(n,K)$ mit $DBD^{-1} = A$ folgt; dies gilt mit $D = C^{-1}$, was sich durch Umstellung von $CAC^{-1} = B$ zu $A = C^{-1}BC$ ergibt.
- $\sim$ ist transitiv, $A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$: Zu zeigen ist, daß aus der Existenz von $S, T \in \mathrm{GL}(n,K)$ mit $SAS^{-1} = B$ und $TBT^{-1} = C$ die Existenz eines $U \in \mathrm{GL}(n,K)$ ergibt mit $UAU^{-1} = C$. Dieses U findet sich durch einfaches Einsetzen:

$$\begin{aligned} TBT^{-1} = C \quad &\Longrightarrow \quad T(\underbrace{SAS^{-1}}_{=B})T^{-1} = C \quad &&\Longrightarrow \quad (TS)A(S^{-1}T^{-1}) = C \\ &\Longrightarrow \quad (TS)A(TS)^{-1} = C \quad &&\Longrightarrow \quad UAU^{-1} = C \quad \text{mit} \quad U := TS. \end{aligned}$$

ii.)

$$\begin{aligned} \lambda \text{ EW von } A \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\, x \neq 0 : Ax = \lambda x \quad &&\Longleftrightarrow \quad (A - \lambda E)x = 0 \text{ mit } x \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \ker(A - \lambda E) \neq \{0\} \quad &&\Longleftrightarrow \quad A - \lambda E \text{ nicht invertierbar} \\ &\Longleftrightarrow \quad \det(A - \lambda E) = 0 \quad &&\Longleftrightarrow \quad P_A(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

iii.) Ist A invertierbar, so gibt es eine Inverse zu A und es gilt: $AA^{-1} = E$. Auf diese Gleichung kann nun der Determinantenmultiplikationssatz angewandt werden:

$$AA^{-1} = E \quad \Longrightarrow \quad \det(AA^{-1}) = \det(E) \quad \Longrightarrow \quad \det(A)\det(A^{-1}) = 1.$$

Ist ein Produkt gleich 1, kann kein Faktor davon 0 gewesen sein, und somit muß $\det(A) \neq 0$ gelten.