Klausur zur Linearen Algebra IIa (DMA) FSS 2011, 29.04.2011
Universität Mannheim, Prof. Dr. C. Hertling, Ralf Kurbel

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und ϕ ein Skalarprodukt auf V, d.h. (V, ϕ) ist ein euklidischer Vektorraum.
- Definieren Sie die Länge $\|x\|$ eines Vektors $x \in V$, und den Abstand $d(x, y)$ zweier Vektoren $x, y \in V$ zueinander.
- Geben Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für $x, y \in V$ an.

ii.) (2P) Sei K ein Körper, und seien $A, B \in M(n \times n, K)$. Vervollständigen Sie die folgenden Aussagen, in dem Sie das Fragezeichen (?) geeignet ersetzen:

$$\begin{aligned} \det(A) \cdot \det(B) \quad &= \quad ? \\ A \text{ invertierbar} \quad &\Longleftrightarrow \quad \det(A) \quad ? \\ A \cdot A^{\sharp} \quad &= \quad ? \\ \det(A) \quad &\in \quad ? \end{aligned}$$

iii.) (1P) Formulieren Sie den Satz von Cayley-Hamilton für einen Endomorphismus ϕ eines endlichdimensionalen K-Vektorraumes V.

iv.) (1P) Sei ϕ ein Endomorphismus des K-Vektorraumes V. Definieren Sie, wann ϕ nilpotent genannt wird.

v.) (2P) Sei K ein Körper. Geben Sie zwei äquivalente Bedingungen/Definitionen dafür an, daß $A \in M(n \times n, K)$ diagonalisierbar ist.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix über $\mathbb{F}_5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{F}_5).$$

Geben Sie das Ergebnis als Element von $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ an.

ii.) (2+1+1P) Es sei ϕ ein nilpotenter Endomorphismus des K-Vektorraumes V, und es sei $U_i := \ker(\phi^i)$. Es seien folgende Größen bekannt:

i	1	2	3	4	5	6	7
$\dim_K U_i$	5	9	12	14	16	17	17

Bestimmen Sie die Jordannormalform von ϕ, sein charakteristisches Polynom $P_\phi(t)$ und sein Minimalpolynom $M_\phi(t)$.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} -4 & 8 & 12 \\ 8 & -16 & -24 \\ 12 & -24 & -34 \end{pmatrix}.$$

i.) (4P) Bestimmen Sie eine invertierbare reelle Matrix T, so daß gilt:

$$T^{tr}AT = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

ii.) (2P) Bestimmen Sie eine invertierbare reelle Matrix S, so daß gilt:

$$S^{tr}AS = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\} \quad \text{und} \quad \varepsilon_i \geq \varepsilon_{i+1}.$$

iii.) (2P) Sei $\phi := \mathrm{Bil}_A$ die durch A definierte Bilinearform auf $M(3 \times 1, \mathbb{R})$. Bestimmen Sie ein $x \in M(3 \times 1, \mathbb{R})$ mit:

$$x \in \mathrm{Rad}(\phi) \quad \text{und} \quad x \neq 0.$$

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

i.) (2P) Zeigen Sie, daß die Spalten von A linear unabhängig sind und damit eine Basis von $M(3 \times 1, \mathbb{R})$.

ii.) (4P) Überführen Sie diese Basis mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren in eine Orthonormalbasis bzgl. des Standard-Skalarproduktes.

iii.) (2P) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung von A.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Jordannormalform J_A von A und eine invertierbare reelle Matrix C mit $C^{-1}AC = J_A$.

ii.) (1+3P) Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß B eine positiv definite Matrix ist.
Sei $\phi := \mathrm{Bil}_B$ das durch B definierte Skalarprodukt (B ist symmetrisch und positiv definit) im $\mathbb{R}^2$. Dann ist $(\mathbb{R}^2, \phi)$ ein euklidischer Vektorraum. Bestimmen Sie alle Punkte (x, y) in diesem Raum, die auf einer Koordinatenachse liegen ($x = 0$ oder $y = 0$) und die Länge 1 haben.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (3P) Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Für $A, B \in M(n \times n, K)$ sei eine Relation $\sim$ definiert durch:

$$A \sim B \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists C \in \mathrm{GL}(n, K) \colon CAC^{-1} = B.$$

Zeigen Sie, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M(n \times n, R)$ ist.

ii.) (3P) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ und $P_A(t)$ das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie, daß für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \quad \Longleftrightarrow \quad P_A(\lambda) = 0.$$

iii.) (2P) Sei K ein Körper. Zeigen Sie für $A \in M(n \times n, K)$:

$$A \text{ invertierbar} \quad \Longrightarrow \quad \det(A) \neq 0.$$

Matrikelnummer: