Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. (4 Punkte) Begründen Sie Ihre Antworten kurz durch ein Beispiel, Gegenbeispiel, die Angabe einer früheren Aufgabe, einer Skriptaussage oder durch eine sonstige kurze Erläuterung.

	Ja	Nein
Es gibt einen Vektorraum mit 8 Elementen.		
Es gibt in $\mathbb{R}^2$ drei linear unabhängige Vektoren.		
$\mathbb{R}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum hat nur die Basis (1).		
Jede Basis eines Untervektorraumes $U \subseteq V$ kann zu einer Basis von V erweitert werden.		
Es gibt zwei nicht-isomorphe Gruppen der Ordnung 3.		
$\mathbb{Q}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.		
Es gibt im $\mathbb{R}^3$ einen echten Untervektorraum $U \subsetneq \mathbb{R}^3$ der Dimension drei.		
Jede linear unabhängige Familie von Vektoren in einem Vektorraum ist auch ein Erzeugendensystem.		

2. *(3+2 Punkte)* Bringen Sie die folgenden Matrizen mit dem Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform und bestimmen Sie den Zeilenrang.

   Geben Sie dabei alle Zeilenumformungen an, die Sie durchführen, mit der Notation von Definition/Lemma 4.4 ($Z_I(\lambda, i), Z_{II}(\lambda; i, j), Z_{III}(i, j)$). Geben Sie jeweils nach vollständiger Bearbeitung einer Spalte die Matrix an, die Sie als Zwischenergebnis erhalten. Folgen Sie bei den Matrizen A und B dem Gauß-Algorithmus in Satz 4.7 wörtlich; bei den Matrizen C und D wählen Sie eine Folge von Zeilenumformungen, die Ihnen günstig erscheint.

   (a)
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -i & -3 \\ i & -3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -15 & 100 & -1096 \\ 1 & 5 & -33 & 365 \end{pmatrix}.$$

   (b) Die folgende Matrix ist über dem Körper $\mathbb{F}_5$ definiert, so daß alle Berechnungen des Gauß-Algorithmus in diesem Körper ausgeführt werden müssen. Die Elemente $[0]_5, \dots, [4]_5$ von $\mathbb{F}_5$ sollen (der Einfachheit halber) mit $0, \dots, 4$ notiert werden:
$$D := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

3. *(5 Punkte)* Berechnen Sie alle möglichen Produkte $M_i \cdot M_j$ der folgenden Matrizen:

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad M_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_4 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_5 := \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \quad M_6 := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. *(2 Punkte)* Es seien folgende Matrizen gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_m \end{pmatrix}.$$

Es seien weder A noch B eine Nullmatrix. Zeigen Sie, daß dann gilt:

$$\text{Zeilenrang}(AB) = 1.$$

Abgabe bis Donnerstag, den 18. November 2010 um 10:15 Uhr in A5.