# Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(2+2 Punkte)*

   (a) Es sei $K$ ein Körper und $I$ eine Menge. Für jedes $i \in I$ sei folgendes Element $f_i$ des $K$-Vektorraumes $K^I$ definiert:
   $$f_i\colon I \to K \quad \text{mit} \quad f_i(j) := \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j \end{cases} \qquad \text{für } j \in I.$$
   Zeigen Sie, daß die Familie $(f_i)_{i\in I}$ linear unabhängig ist und zusätzlich gilt:
   $$(f_i)_{i\in I} \text{ ist eine Basis des } K^I \quad \Longleftrightarrow \quad |I| < \infty.$$

   (b) Es sei $\log\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ der natürliche Logarithmus, die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion (siehe auch Analysis). Zur Erinnerung die (hier) wesentlichen Eigenschaften dieser Funktion: log ist eine bijektive Funktion mit der (einzigen) Nullstelle $\log(1) = 0$, und es gilt für $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $c \in \mathbb{Q}$
   $$\log(ab) = \log(a) + \log(b), \quad \log\left(\tfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b) \quad \text{und} \quad c\log(a) = \log(a^c).$$
   Es sei $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen. Zeigen Sie, daß folgende Familie linear unabhängig ist im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$:
   $$\big(\log(p)\big)_{p\in\mathbb{P}}.$$
   (Hinweis: Die eindeutige Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen ist hilfreich für den Beweis der Aussage.)

2. *(4 Punkte)* Gegeben sind die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$,
   $$v_0 := (0,0,0),\ v_1 := (1,0,0),\ v_2 := (0,1,0),\ v_3 := (0,0,1),\ v_4 := (1,2,0),$$
   $$v_5 := (0,-1,3),\ v_6 := (1,1,1),\ v_7 := (-2,-4,0),\ v_8 := (1,1,0),$$
   die folgenden Indexmengen
   $$I_1 := \{0,1,4,8\}, \quad I_2 := \{2,3,4,6,7\}, \quad I_3 := \{0,1,2,3,4,5\}, \quad I_4 := \{1,5,6,7,8\}$$
   und die Unterräume $V_k := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_i)_{i\in I_k}$ des $\mathbb{R}^3$ für $k \in \{1,2,3,4\}$. Bestimmen Sie Teilmengen $J_k \subset I_k$ mit der Eigenschaft, daß $(v_j)_{j\in J_k}$ eine Basis von $V_k$ ist und schreiben Sie die Vektoren $v_i$, $i \in I_k - J_k$, als Linearkombinationen der Vektoren $v_j$, $j \in J_k$.

3. *(2 Punkte)* Betrachten Sie für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Vektoren
   $$v_{1,t} := (2,1), \quad v_{2,t} := t\cdot(t^2,2), \quad v_{3,t} := t\cdot(t,1),$$
   im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ und die Untervektorräume
   $$V_{1,t} := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_{1,t}, v_{2,t}) \quad \text{und} \quad V_{2,t} := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_{1,t}, v_{2,t}, v_{3,t}).$$
   Bestimmen Sie für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Dimensionen $\dim_{\mathbb{R}} V_{1,t}$ und $\dim_{\mathbb{R}} V_{2,t}$. (Hinweis: Fallunterscheidungen.)

**Bitte wenden!**

4. *(1+1+1+3 Punkte)* Sei $V$ ein $K$-Vektorraum.

(a) (1P) Sei $(v_j)_{j\in J}$ eine Familie von Vektoren aus $V$, und sei $I \subseteq J$. Zeigen Sie:

i. Ist $(v_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von $V$, so ist auch $(v_j)_{j\in J}$ ein Erzeugendensystem von $V$.

ii. Ist $(v_j)_{j\in J}$ linear unabhängig, so ist auch $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig.

(b) (1P) Sei $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig in $V$ und $v \in V$. Zeigen Sie:

$$v_1, \ldots, v_n, v \text{ ist linear unabhängig} \quad \Longleftrightarrow \quad v \notin \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n).$$

(c) (1P) Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Zeigen Sie, daß

$$W_1 \cap W_2 \quad \text{und} \quad W_1 + W_2 := \{a + b \mid a \in W_1, b \in W_2\}$$

Untervektorräume von $V$ sind.

(d) (3P) Zeigen Sie, daß für zwei Untervektorräume $W_1, W_2 \subseteq V$ mit $\dim_K W_1 < \infty$ und $\dim_K W_2 < \infty$ gilt: $\dim_K(W_1 \cap W_2) < \infty$ und $\dim_K(W_1 + W_2) < \infty$, und es ist

$$\dim_K(W_1 + W_2) = \dim_K W_1 + \dim_K W_2 - \dim_K(W_1 \cap W_2).$$

**Abgabe bis Donnerstag, den 10. November 2010 um 10:15 Uhr in A5.**