Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Ralf Kurbel

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(2+2 Punkte)*

   (a) Sei M eine Menge. Ihre Potenzmenge $P(M)$ ist zusammen mit der symmetrischen Differenz $\ominus$ eine abelsche Gruppe (siehe Bemerkung 2.3.i).
   Weiter sei $\mathbb{F}_2$ der Körper $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \cdot)$, und es sei folgende Verknüpfung definiert:

   $$\cdot : \mathbb{F}_2 \times P(M) \to P(M) \quad \text{mit} \quad (\alpha, A) \mapsto \begin{cases} \emptyset & \alpha = 0, \\ A & \alpha = 1. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, daß damit $P(M)$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist.

   (b) Sei K ein Körper und I ein Menge. In Aufgabe 2 von Blatt 6 haben Sie gezeigt, daß die Menge K^I mit der Verknüpfung $\oplus$ eine abelsche Gruppe ist. Nun sei weiter folgende Verknüpfung definiert:

   $$\odot : K \times K^I \to K^I \quad \text{mit} \quad (\alpha \odot f)(i) := \alpha \cdot f(i) \text{ für } i \in I.$$

   Zeigen Sie, daß damit K^I ein K-Vektorraum ist.

   (In beiden Aufgabenteilen brauchen Sie nur die Eigenschaften i) bis iv) der Verknüpfung zwischen Körper und abelscher Gruppe nachzuweisen.)

2. *(2+1+1 Punkte)* Sei K ein Körper. Die Menge $K[t]$ der Polynome über dem Körper K ist definiert als die Menge aller formalen Summen

   $$K[t] := \{ \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \mid n \in \mathbb{N}_0, a_i \in K \text{ und } a_n \neq 0 \} \cup \{0\}.$$

   Für zwei Polynome $p, q \in K[t]$ mit $p := \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ und $q := \sum_{j=0}^{m} b_j t^j$ sind die Summe und das Produkt definiert durch

   $$p \cdot q := \sum_{k=0}^{n+m} \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j \Big) t^k \quad \text{und} \quad p + q := \sum_{i=0}^{k} c_i t^i,$$

   wobei für die Koeffizienten c_i der Summe $p + q$ und deren oberen Summenindex k gelten:

   $$k := \max\{0 \leq i \leq \max(n, m) \mid c_i \neq 0\} \quad \text{und} \quad c_i := \begin{cases} a_i + b_i & 0 \leq i \leq \min(m, n) \\ a_i & \text{falls } n > m \text{ und } m < i \leq n \\ b_i & \text{falls } n < m \text{ und } n < i \leq m. \end{cases}$$

   Mit diesen Verknüpfungen ist $K[t]$ ein kommutativer Ring mit Eins.
   Der Grad eines Polynomes $p := \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in K[t]$ sei definiert als $\mathrm{grad}(p) := n$, und es sei $\mathrm{grad}(0) := -\infty$.

Bitte wenden!

(a) Es sei folgende Verknüpfung zwischen K und $K[t]$ definiert:

$$\cdot : K \times K[t] \to K[t] \quad \text{mit} \quad \big(\alpha, \sum_{i=0}^{n} a_i t^i\big) \mapsto \sum_{i=0}^{n} \alpha a_i t^i.$$

Zeigen Sie, daß damit $K[t]$ ein K-Vektorraum ist (Sie brauchen nicht zu zeigen, daß $(K[t], +)$ eine abelsche Gruppe ist).

(b) Zeigen Sie für $p, q \in K[t]$ die beiden Gradformeln

$$\operatorname{grad}(p+q) \leq \max\big(\operatorname{grad}(p), \operatorname{grad}(q)\big) \quad \text{und} \quad \operatorname{grad}(pq) = \operatorname{grad}(p) + \operatorname{grad}(q).$$

(c) Für $m \in \mathbb{N}_0$ sei definiert:

$$K_m[t] := \{\, p \in K[t] \mid \operatorname{grad}(p) \leq m \,\}.$$

Zeigen Sie, daß $K_m[t]$ ein Untervektorraum von $K[t]$ ist.

3. *(2+2 Punkte)*

Es seien $v_1 := (2, 0)$ und $v_2 := (-1, 3)$ Vektoren des $\mathbb{R}^2$.

(a) Finden Sie Koeffizienten $\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{13}, \lambda_{23} \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_{11} v_1 + \lambda_{21} v_2 = (1, 0), \qquad \lambda_{12} v_1 + \lambda_{22} v_2 = (0, 1), \qquad \lambda_{13} v_1 + \lambda_{23} v_2 = (3, 2).$$

(b) Zeigen Sie: Für jedes $v \in \mathbb{R}^2$ gibt es eindeutige $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = v$.

4. *(3+1 Punkte)* Es sei $\mathbb{F}_5$ der Körper $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

(a) Berechnen Sie für das Polynom $p \in \mathbb{F}_5[t]$ mit

$$p = t(t - [1]_5)(t - [2]_5)(t - [3]_5)(t - [4]_5)$$

den Grad k und die Koeffizienten der Summendarstellung $p = \sum_{i=0}^{k} a_i t^i$, wobei die $a_i \in \{[0]_5, \ldots, [4]_5\}$ liegen sollen.

(b) Zeigen Sie, daß für $K := \mathbb{F}_5$ die Abbildung

$$\Phi\colon K[t] \to \operatorname{Abb}(K, K), \quad p \mapsto \big(\alpha \mapsto p(\alpha)\big)$$

nicht injektiv ist. Hierbei ist $p(\alpha)$ für $\alpha \in K$ und $p = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ definiert als

$$p(\alpha) := \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i,$$

und für $p = 0$ als $p(\alpha) := 0$.

Abgabe bis Donnerstag, den 04. November 2010 um 10:15 Uhr in A5.