Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(2+1+1 Punkte)* Sei M eine Menge und $\mathcal{P}(M) := \{ A \mid A \subseteq M \}$ ihre Potenzmenge (Menge aller Teilmengen, mit $\emptyset, M \in \mathcal{P}(M)$). Ist M eine endliche Menge mit $k := |M|$, so gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^k$.

   Für zwei Teilmengen A und B von M sei die symmetrische Differenz definiert durch

   $$A \ominus B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) \qquad \text{(Vereinigung der Mengen ohne ihren Schnitt)}$$

   $\mathcal{P}(M)$ ist zusammen mit der symmetrischen Differenz eine abelsche Gruppe, und zusammen mit der Verknüpfung $\cap$ (Schnitt von Mengen) ein kommutativer Ring mit 1 (siehe 2.3.i im Skript). (Dies braucht nicht bewiesen zu werden!)

   (a) (2P) Geben Sie für $M := \{1, 2, 3\}$ die Verknüpfungstafeln der „Addition" $\ominus$ und der „Multiplikation" $\cap$ an.

   Beispiel für $M := \{1\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}(M) = \{ \emptyset, \{1\} \}$:

$\ominus$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\emptyset$

$\cap$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$

   (b) (1P) Finden Sie ein minimales Erzeugendensystem der Gruppe $(\mathcal{P}(M), \ominus)$ für $M := \{1, 2, 3\}$, d.h. eine Menge $V \subseteq \mathcal{P}(M)$, so daß sich jedes Element aus $\mathcal{P}(M)$ als eine endliche Summe (bzgl. $\ominus$) der Elemente aus V schreiben läßt und jede Verkleinerung von V diese Eigenschaft verliert.

   Achtung: es ist nicht gefordert, die kleinste Menge V in $\mathcal{P}(M)$ zu finden, die ein Erzeugendensystem ist, sondern ein Erzeugendensystem, welches nicht mehr verkleinert werden kann. Für die Gruppe S_n sind zum Beispiel $\{(1\ 2), (1\ 2 \dots n)\}$ und $\{(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n)\}$ jeweils minimale Erzeugendensysteme, aber für $n > 3$ sind diese Erzeugendensysteme nicht gleich groß.

   (c) (1P) Zeigen Sie für eine beliebige Menge M, daß jede Teilmenge $A \subseteq M$ mit $A \neq M$ ein Nullteiler im Ring $(\mathcal{P}(M), \ominus, \cap)$ ist. Zeigen Sie weiter, daß jede Teilmenge $A \subseteq M$ mit $A \neq \emptyset$ die Ordnung 2 in der abelschen Gruppe $(\mathcal{P}(M), \ominus)$ hat.

2. *(4 Punkte)* Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit 1 und I eine beliebige Menge, und es sei definiert:

   $$R^I := \{ f \colon I \to R \mid f \text{ Abbildung} \}.$$

   Auf der Menge R^I seien folgende zwei Verknüpfungen definiert:

   $$f \oplus g \colon I \to R \text{ mit } (f \oplus g)(i) := f(i) + g(i) \qquad \text{und} \qquad f \odot g \colon I \to R \text{ mit } (f \odot g)(i) := f(i) \cdot g(i)$$

   für $f, g \in R^I$ und $i \in I$.

   Zeigen Sie, daß $(R^I, \oplus, \odot)$ ein kommutativer Ring mit 1 ist und geben Sie die 0 und die 1 dieses Ringes explizit an.

Bitte wenden !!!

Abgabe bis Donnerstag, den 28. Oktober 2010 um 10:15 Uhr in A5.

3. *(2+1+1 Punkte)*

   (a) (2P) Geben Sie den Realteil, Imaginärteil und Betrag folgender komplexer Zahlen an:

   $$z_1 := \frac{1}{i}, \quad z_2 := -\frac{1-i}{1+i} + \frac{2-4i}{3}, \quad z_3 := \frac{(1+i)^2}{4} - \frac{6-3i}{i^3}, \quad z_4 := (1+i)^2(1-i)^2.$$

   (b) (1P) Sei $c = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$. Zeigen Sie $\zeta^2 = c$ für

   $$\zeta := \sqrt{\frac{1}{2}(a + |c|)} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{1}{2}(-a + |c|)}.$$

   (c) (1P) Geben Sie von folgenden Zahlen den Realteil und den Imaginärteil an:

   $$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2010} \quad \text{und} \quad e^{\pi i} + e^{-\pi i}.$$

4. *(4 Punkte)* Einst fand ein junger Abenteurer auf dem Dachboden seines Großvaters ein altes Pergament:

   > *Sail to [redacted] North latitude and [redacted] West longitude where thou wilt find a deserted island. There lieth a large meadow, not pent, on the north shore of the island where standeth a lonely oak and a lonely pine. There thou wilt also see an old gallows on which we once wont to hang traitors. Start thou from the gallows and walk to the oak counting thy steps. At the oak thou must turn right by a right angle and take the same number of steps. Put here a spike in the ground. Now must thou return to the gallows and walk to the pine counting thy steps. At the pine thou must turn left by a right angle and see that thou takest the same number of steps, and put another spike into the ground. Dig halfway between the spikes; the treasure is there.*

   Der junge Abenteurer segelte umgehend zur angegebenen Position. Zwar traf er auf der Insel die Bäume wie beschrieben an, doch einen Galgen fand er nicht vor. Dieser war wohl bereits verrottet. Unverrichteter Dinge machte sich der junge Abenteuer wieder auf den Heimweg. Welch ein Fehler!

   Beweisen Sie, dass die Beschreibung des alten Pergaments unabhängig von der Position des Galgens zum Schatz führt. (*Hinweis:* Stellen Sie die Positionen des Galgens und der Bäume in der komplexen Zahlenebene dar und formulieren Sie die Wegbeschreibung mittels Addition und Multiplikation komplexer Zahlen.)

Abgabe bis Donnerstag, den 28. Oktober 2010 um 10:15 Uhr in A5.