

## Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. (1+1+1+1 Punkte)

- Geben Sie die Linksnebenklassen von  $V_4$  in  $S_4$  als Mengen an ( $V_4$  die Kleinsche Vierergruppe von Aufgabe 2.d auf Blatt 4), d.h. die Elemente der Menge  $S_4/V_4$ .
- $V_4$  ist ein Normalteiler von  $S_4$  und  $S_4/V_4$  somit nach Satz 1.36 eine Gruppe. Geben Sie die Verknüpfungstafel der Gruppe  $S_4/V_4$  an (Sie können für die Angabe der Nebenklassen  $\sigma_1 V_4, \dots, \sigma_6 V_4$  selbst geeignete Repräsentanten  $\sigma_i \in S_4$  wählen).
- Jede Gruppe mit 6 Elementen ist entweder isomorph zu  $S_3$  oder  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ . Bestimmen Sie, zu welcher der beiden Gruppen  $S_4/V_4$  isomorph ist. (Es reicht wieder zu begründen, warum  $S_4/V_4$  zu einer der beiden angegebenen Gruppen nicht isomorph sein kann.)
- Geben Sie alle Linksnebenklassen von  $V_4$  in  $A_4$  an und einen Gruppenisomorphismus von  $A_4/V_4$  zu  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

2. (1+1+1+1 Punkte)

- Geben Sie alle injektiven Gruppenhomomorphismen von  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  an.
- Geben Sie alle Gruppenhomomorphismen von  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  an.
- Geben Sie alle surjektiven Gruppenhomomorphismen von  $S_3$  nach  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  an.
- Geben Sie alle surjektiven Gruppenhomomorphismen von  $A_4$  nach  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  an.

Begründen Sie in allen Fällen, warum es nur die von Ihnen angegebenen Gruppenhomomorphismen gibt.

3. (1+1+2 Punkte)

- Zeigen Sie, daß  $D_4$  in  $S_4$  kein Normalteiler ist.
- Beweisen Sie, daß die zweielementigen Untergruppen von  $S_3$  alle konjugiert sind (Beispiel 1.35.iii).
- Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $U \subseteq G$  eine Untergruppe. Beweisen Sie, daß gilt:

$$|U| = \frac{|G|}{2} \implies U \text{ ist ein Normalteiler in } G.$$

4. (1+1+2 Punkte) Es sei  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$ . Auf dieser Teilmenge von  $\mathbb{R}$  können die bekannten Verknüpfungen  $+$  (Addition) und  $\cdot$  (Multiplikation) betrachtet werden, und  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  ist bzgl. dieser beiden Verknüpfungen ein Körper. Einige Aussagen dazu sollen Sie nun in Teil (a) und (b) beweisen.

- Beweisen Sie, daß die Menge  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  bzgl. der Verknüpfungen abgeschlossen ist
- Beweisen Sie, daß jedes Element aus  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}$  ein multiplikatives Inverses hat, d.h. geben Sie zu  $a + b\sqrt{2} \neq 0$  ein solches an.
- Schreiben Sie die folgenden vier Elemente aus  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  in der Form  $a + b\sqrt{2}$  mit  $a, b \in \mathbb{Q}$ :

$$(3 + 5\sqrt{2})(7 - 4\sqrt{2}), \quad (\sqrt{2} - 1)^4, \quad \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{2}^{101}}{2 + \sqrt{2}}.$$