Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(1+1+1+1 Punkte)* Seien G und H endliche Gruppen und $\phi\colon G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus.
   (a) Zeigen Sie, daß für $|G| = p$ mit p Primzahl die Gruppe G zyklisch ist und jedes Element $g \neq e$ in G ein Erzeugendes der zyklischen Gruppe G ist.
   (b) Zeigen Sie, daß für G zyklisch mit $G = \langle g \rangle$ auch $\phi(G) \subseteq H$ zyklisch ist, und geben Sie ein erzeugendes Element von $\phi(G)$ an.
   (c) Sei $g \in G$ mit $g^m = e$. Zeigen Sie, daß dann $o(g) \mid m$ gilt, d.h. die Ordnung von g teilt m.
   (d) Sei $g \in G$. Zeigen Sie: $o\big(\phi(g)\big) \mid o(g)$, d.h. die Ordnung von $\phi(g)$ teilt die Ordnung von g.

2. *(1+1+1+1 Punkte)*
   (a) Geben Sie alle 10 Untergruppen der alternierenden Gruppe A_4 an.
   (b) Für $n \in \mathbb{N}$ seien in S_n folgende Elemente definiert:
   $$\delta_n := (12\ldots n), \sigma_n := \begin{cases} (1\ n-1)(2\ n-2)\ldots\left(\frac{n}{2}-1\ \frac{n}{2}+1\right) & n \text{ gerade} \\ (1\ n-1)(2\ n-2)\ldots\left(\frac{n-1}{2}\ \frac{n+1}{2}\right) & n \text{ ungerade} \end{cases}$$
   Weiter sei $D_n := \langle \delta_n, \sigma_n \rangle$ diejenige Untergruppe von S_n, die von allen möglichen Produkten mit diesen beiden Elementen erzeugt wird (mit e als leerem Produkt oder Potenz mit Exponent 0). Achtung: in diesen Produkten ist zugelassen, daß die beiden Elemente mehrfach vorkommen, z.B. $\sigma_n^2\delta_n^3\sigma_n\delta_n\sigma_n^5$ usw. Als Elemente aus S_n haben beide Elemente ein Inverses, das sich als Potenz des jeweiligen Elementes schreiben läßt, so daß tatsächlich alle Bedingungen für eine Untergruppe erfüllt sind (Definition 1.17 und Bemerkung 1.18). Diese Untergruppen heißen Diedergruppen und es gilt $|D_n| = 2n$.
   Geben Sie D_4 an.
   (c) Betrachten Sie das reguläre Viereck mit den Ecken
   $$\{\underbrace{(1,0)}_{\text{Ecke 1}}, \underbrace{(0,1)}_{\text{Ecke 2}}, \underbrace{((-1,0)}_{\text{Ecke 3}}, \underbrace{(0,-1)}_{\text{Ecke 4}}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$
   und geben Sie für jedes Element aus D_4 an, durch welche geometrische Operation der Ebene es beschrieben wird, die das Viereck auf sich selbst abbildet (Drehung um Winkel α, Spiegelung an der Ursprungsgeraden g). Siehe dazu auch Beispiel 1.21.vi und Aufgabe 3 von Blatt 2.
   Bemerkung: Die Diedergruppe D_n läßt sich allgemein durch geometrische Operationen der Ebene beschreiben, die das reguläre n-Eck in sich überführen.
   (d) Die Menge $V_4 := \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subseteq S_4$ ist eine Untergruppe und heißt Kleinsche Vierergruppe. Geben Sie die Verknüpfungstafel dieser Gruppe an (siehe auch Aufgabe 3 auf Blatt 1). Diese abelsche Gruppe ist entweder zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oder zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorph. Zu welcher? (Als Begründung reicht es zu erklären, warum sie zu der anderen Gruppe nicht isomorph sein kann).

3. *(2+2 Punkte)* Seien G und H Gruppen und $\phi\colon G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus.
   (a) Beweisen Sie:
   $$\phi \text{ ist injektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad \ker\phi = \{e_G\}.$$
   (b) Sei für $g \in G$ mit $l_g\colon G \longrightarrow G$, $l_g(h) := gh$, die Linksmultiplikation beschrieben (Definition 1.30), welche nach Satz 1.31.a eine Bijektion von G in sich ist. Zeigen Sie, daß für $g \neq e$ die Abbildung kein Gruppenhomomorphismus ist.
   Zeigen Sie weiter, daß die folgende Abbildung ein injektiver Gruppenhomomorphisus ist:
   $$\Psi\colon G \longrightarrow Bij(G,G), \qquad \Psi(g) := l_g.$$

4. *(2+2 Punkte)*
   (a) Geben Sie alle möglichen Gruppenhomomorphismen von S_3 nach $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ an (natürlich mit Begründung Ihrer Antwort).
   (b) Finden Sie jeweils alle Erzeuger der zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/61\mathbb{Z}$.

Abgabe bis Donnerstag, den 7. Oktober 2010 um $10:15$ **Uhr in A5.**