Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(1+2+1 Punkte)* Die Ordnung eines Elementes a einer Gruppe G ist $o(a) := \min\{l \in \mathbb{N} \mid a^l = e\}$, falls so ein l existiert, und $o(a) := \infty$ sonst. Nach Aufgabe 1.a) von Blatt 2 ist bei einer zyklischen Permutation $\sigma = (a_1 a_2 ... a_k)$ die Ordnung $o(\sigma) = k$.

   (a) Sei $\varphi = \sigma_1 \circ ... \circ \sigma_m \in S_n$, wobei $\sigma_1, ..., \sigma_m$ zyklische Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern seien. Sei weiter $k_i := o(\sigma_i)$. Zeigen Sie
   $$o(\varphi) = \mathrm{kgV}(k_1, ..., k_m).$$

   (b) Sei $\psi_1 := (139)(25976)(2914) \in S_9$ und $\psi_2 := (12)(24)(35)(46)(57)(98)(79) \in S_9$. Schreiben Sie ψ_1 und ψ_2 jeweils als Produkt zyklischer Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern und bestimmen Sie $o(\psi_1)$, $\mathrm{sign}\,(\psi_1)$, $o(\psi_2)$ und $\mathrm{sign}\,(\psi_2)$.

   (c) Finden Sie in S_4 jeweils eine Untergruppe der Ordnung 4 und 6.

2. (a) *(2 Punkte)* Die Addition auf der Gruppe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ war definiert durch $[a]+[b] := [a+b]$. Genauso kann man eine Multiplikation definieren durch $[a] \cdot [b] := [a \cdot b]$ (Dass sie wohldefiniert ist, wird in Kapitel 2 gezeigt; damit wird $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ein *Ring*, siehe Kapitel 2). Die Verknüpfungstafeln der beiden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sind:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

   Wir haben die Zahlen $0, \dots, 3$ statt der Klassen $[0], \dots, [3]$ geschrieben, um die Übersicht zu verbessern. Geben Sie die Verknüpfungstafeln der Addition und der Multiplikation auf $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ an (wobei Sie auch die Klammern, welche die Klassen darstellen, weglassen können). Es reicht die Angabe der Tafeln, Begründungen sind nicht nötig.

   (b) *(1.5 + 0.5 Punkte)* Zeigen Sie mit Hilfe der Verknüpfungstafeln, daß $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \cdot)$ eine zyklische Gruppe ist und $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ keine Gruppe (die Assoziativität der Multiplikation dürfen Sie voraussetzen).

3. *(4 Punkte)* Aus der Schule wissen Sie, wie man bei großen Dezimalzahlen die Teilbarkeit durch 3 prüft, mit der Quersumme. Genauer: Für eine Zahl $a = \sum_{k=0}^{l} 10^k \cdot a_k$ mit $a_k \in \mathbb{Z}$ (z.B. $a_k \in \{0, 1, ..., 9\}$) ist
   $$a \equiv \sum_{k=0}^{l} a_k \mod 3 \qquad \text{d.h. 3 teilt } a \text{ genau dann, wenn 3 die Quersumme von } a \text{ teilt.}$$
   (Nach Definition/Lemma 1.26 gilt offensichtlich: a teilt $b \iff b \equiv 0 \mod a$.)
   Sie sollen diese Regel und folgende weitere Regeln für das Rechnen modulo $2, 7$ und 9 beweisen:
   $$a \equiv a_0 \mod 2.$$
   $$a \equiv \sum_{k\geq 0} a_k \mod 3.$$
   $$a \equiv \sum_{k\geq 0} (-1)^k (a_{3k} + 3 \cdot a_{3k+1} + 2 \cdot a_{3k+2}) \mod 7.$$
   $$a \equiv \sum_{k\geq 0} a_k \mod 9.$$
   Hinweise: Zeigen Sie mit Hilfe der Gleichungen $10 = 1 + 9$ und $1000 = -1 + 13 \cdot 11 \cdot 7$, daß
   $$\begin{aligned} 10^k &\equiv 1 \mod m && \text{für } m \in \{9, 3\}, \\ 10^{3k} &\equiv (-1)^k \mod m && \text{für } m \in \{1001, 7, 11, 13\}, \end{aligned}$$
   gilt, und benutzen Sie dann auch $100 = 2 + 14 \cdot 7$ und $10 = 3 + 7$.

4. *(1+3 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, daß für zwei Gruppen $(G_1, *)$ und $(G_2, \odot)$ das Produkt $G_1 \times G_2$ mit der Verknüpfung

$$(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) := (g_1 * h_1, g_2 \odot h_2)$$

zu einer Gruppe wird.

(b) Im folgenden meint $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ immer die Gruppe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$.
Überprüfen Sie, ob folgende Gruppen isomorph sind (isomorphe Gruppen sind strukturell übereinstimmend: um eine Isomorphie zu widerlegen, reicht die Angabe einer Eigenschaft einer Gruppe, die ihr Widerpart nicht besitzt):

i. S_3 und $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?

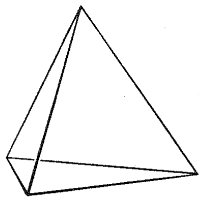
ii. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

iii. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?

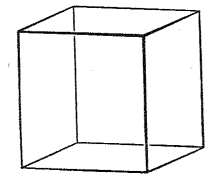
Abgabe bis Donnerstag, den 30. September 2010 um $\mathbf{10:00}$ Uhr in A5.

Platonische Körper

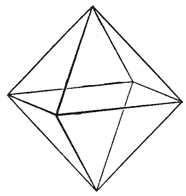
Weil sie so schön sind und zur mathematischen Allgemeinbildung gehören, geben wir auf dieser Seite Bilder der fünf platonischen Körper. Sie sind die einzigen konvexen dreidimensionalen Polyeder, deren Seiten alle gleichseitige n-Ecke sind, mit einem festen n für ein Polyeder. Es gibt die folgenden platonischen Körper:



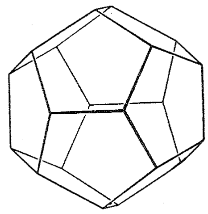
Tetraeder



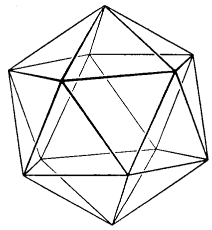
Würfel



Oktaeder

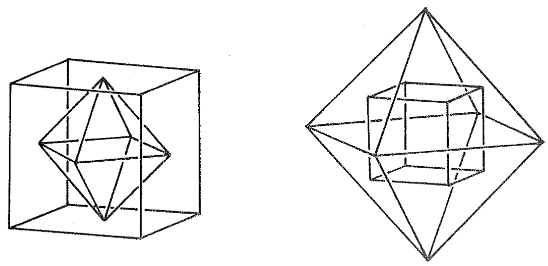


Dodekaeder



Ikosaeder

Schon in der Antike war die Konstruktion dieser Körper bekannt. Die Pythagoräer kannten Tetraeder, Würfel (=Hexaeder) und Dodekaeder, während Oktaeder und Ikosaeder von Theaitetos, einem Schüler von Sokrates, konstruiert wurden. Alle Konstruktionen sind in den „Elementen“ von Euklid dargestellt.
Der Würfel und das Oktaeder sind dual, d.h. die Flächenmittelpunkte des einen sind Ecken (einer Kopie) des anderen. Auch Dodekaeder und Ikosaeder sind dual. Das Tetraeder ist selbstdual. Das folgende Bild zeigt die Dualität von Oktaeder und Würfel.



Als orientierungserhaltende Symmetrien eines platonischen Körpers bezeichnen wir Drehungen des $\mathbb{R}^3$ um Achsen durch 0, die den platonischen Körper auf sich selbst abbilden. Hier soll 0 auch der Mittelpunkt des Körpers sein.
$\mathcal{T}$ bezeichnet die Gruppe der orientierungserhaltenden Symmetrien des Tetraeders, $\mathcal{O}$ die des Oktaeders und des Würfels (weil sie dual sind, haben sie die gleiche Symmetriegruppe) und $\mathcal{I}$ die des Ikosaeders und des Dodekaeders.

In Übung 3, Blatt 2, haben Sie $\mathcal{T} \cong A_4$ gesehen, mit Hilfe einer Bijektion der Menge der 4 Ecken auf die Menge $\{1, 2, 3, 4\}$. Schwerer zu sehen ist $\mathcal{O} \cong S_4$: Dafür betrachtet man die Operation der Symmetrien auf der Menge der 4 Raumdiagonalen des Würfels.
Noch (viel) schwerer zu sehen ist $\mathcal{I} \cong A_5$. Dafür kann man die Operation der Symmetrien auf der Menge mit fünf Elementen betrachten, deren Elemente vom folgenden Typ sind: Jedes Element besteht aus 3 aufeinander senkrechten Geraden durch 0 und durch die Kantenmittelpunkte gegenüberliegender Kanten des Ikosaeders.

Mehr Informationen über die Platonischen Körper, ihre Symmetriegrupppen und auch über andere Polyeder findet man z.B. in dem Buch „Lineare Algebra“ von E. Brieskorn, erschienen bei Vieweg (aus welchem auch die obigen Bilder stammen) und in „Generators and relations for discrete groups“ von H.S.M. Coxeter (Springer-Verlag). Bewegliche Bilder finden Sie auf der folgenden Internetseite:

`http://matti.usu.edu/nlvm/nav/frames_asid_131_g_3_t_3.html`