Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Ralf Kurbel

Blatt 2
15.09.2010

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(1+3 Punkte)*

   (a) Sei $\sigma = (a_1 \ \dots \ a_k)$ eine zyklische Permutation. Zeigen Sie, daß $\sigma^k = id$ gilt und k die kleinste Zahl in $\mathbb{N}$ ist, die diese Bedingung erfüllt.

   (b) Schreiben Sie die folgenden Permutationen $\psi_1, .., \psi_6 \in S_8$ als Produkte zyklischer Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 2 & 6 & 5 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \\
\psi_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \\
\psi_3 &= (1\ 4\ 5)(5\ 1\ 4\ 3)(6\ 1), \\
\psi_4 &= (6\ 7\ 8)(3\ 2\ 6)(1\ 2\ 3\ 4), \\
\psi_5 &= (1\ 4\ 3\ 6)(4\ 5\ 6)(4\ 7\ 8), \\
\psi_6 &= \psi_5^{-1}.
\end{aligned}$$

2. *(2+1+1 Punkte)*

   (a) Schreiben Sie die 6 Elemente der Gruppe S_3 auf, und zwar bis auf das neutrale Element id $\in S_3$ alle als Produkte zyklischer Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern. Geben Sie für jede Permutation aus S_3 das Signum an.

   (b) Sei $A_3 := \{\sigma \in S_3 \mid \operatorname{sign}(\sigma) = +1\}$. Geben Sie die Menge A_3 und die Menge $\sigma A_3 := \{\sigma \circ \pi \mid \pi \in A_3\}$ mit $\sigma = (1\ 2)$ an.

   (c) Sei $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_5$. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle.

(i,j)	$(\sigma(i),\sigma(j))$	Fehlstand
$(1,2)$	$(5,1)$	ja
$(1,3)$		
$(1,4)$		
$(1,5)$		
$(2,3)$		
$(2,4)$		
$(2,5)$		
$(3,4)$		
$(3,5)$		
$(4,5)$		

3. *(2+2 Punkte)*

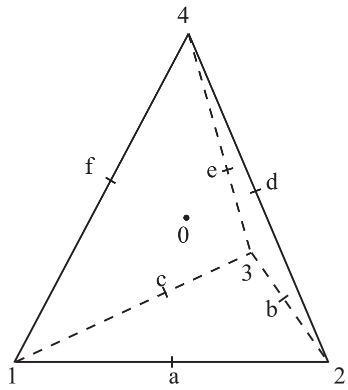
   (a) Geben Sie die Menge $A_4 := \{\sigma \in S_4 \mid \operatorname{sign}(\sigma) = +1\} \subseteq S_4$ an ($|A_4| = 12$).

Bitte wenden !!!

Abgabe bis Donnerstag, den 23.09.2010 um 10:00 Uhr in A5.

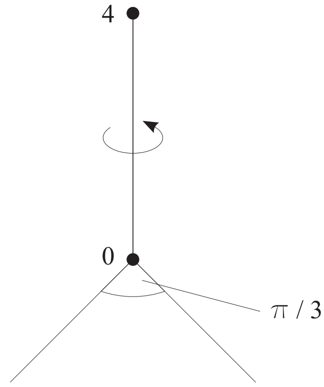
(b) T sei ein gleichseitiges Tetraeder im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt 0, Ecken $1, 2, 3, 4$ und Kantenmittelpunkten a, b, c, d, e, f wie in der Skizze.

Einige Fakten (die Sie hier nicht beweisen müssen): Jede Drehung von T gibt eine Bijektion der Eckenmenge $\{1, 2, 3, 4\}$ auf sich; diese Bijektion ist in A_4. Alle Elemente von A_4 werden so realisiert.



Geben Sie in einer Tabelle an, welches Element von A_4 durch welche Drehung realisiert wird.

Achtung: Um eine Drehung zu charakterisieren, braucht man eine orientierte Drehachse (nur beim Drehwinkel π ist die Orientierung egal) und einen Drehwinkel. Zum Beispiel geben die Achse $\overline{04}$ und der Winkel $\frac{\pi}{3}$ die folgendermaßen skizzierte Drehung.



4. *(2+2 Punkte)*

(a) Sei G eine Gruppe. Für ein $g \in G$ sei $\phi_g : G \to G$ definiert durch $\phi_g(h) := ghg^{-1}$. Zeigen Sie, daß ϕ_g ein Gruppenisomorphismus ist.

(b) Sei G eine Gruppe und ϕ_g für $g \in G$ definiert wie in Aufgabenteil (a). Bij (G, G) ist nach Satz 1.5 eine Gruppe. Beweisen Sie, daß die Abbildung

$$G \to \mathrm{Bij}\,(G, G), \quad g \mapsto \phi_g$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Zeigen Sie, daß im Falle $G = S_2$ diese Abbildung weder injektiv noch surjektiv ist.