

## Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

- (2 Punkte) Alice is as old as Betty and Christine together. Last year Betty was twice as old as Christine. Two years hence Alice will be twice as old as Christine. What are the ages of the three girls?
- (3 Punkte) Bestimmen Sie für jedes  $a \in \mathbb{R}$  die Lösungsmenge in  $M(3 \times 1, \mathbb{R})$  des folgenden inhomogenen linearen Gleichungssystems.

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & & & & - & 3x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & ax_2 & - & x_3 & & = & -2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & ax_3 & & = & 1 \end{array}$$

- (3 Punkte) Invertieren Sie folgende Matrix aus  $M(3 \times 3, \mathbb{F}_5)$ :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- (3 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungsmengen in  $M(4 \times 1, \mathbb{R})$  des folgenden inhomogenen Gleichungssystems und des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

$$\begin{array}{rccccrcr} 7x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 24 \\ - & 4x_1 & - & 3x_2 & & & - & x_4 & = & -17 \\ 7x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 27 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & & & = & 21 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \end{array}$$

- (3 Punkte)

Es sei folgende lineare Abbildung gegeben:

$$f: M(3 \times 1, \mathbb{R}) \rightarrow M(3 \times 1, \mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von  $f$ .

6. (2 Punkte) Der Mathematiker Diophant hat irgendwann zwischen 150 und 350 unserer Zeitrechnung in Alexandria gelebt. Geburtsdatum und Todesdatum kennt man nicht. Aber über sein Alter gibt ein Epigramm aus späthellenistischer Zeit Auskunft, das als Grabinschrift gedacht werden soll. Hier ist eine deutsche Übersetzung.

Hier dies Grabmal deckt Diophantos. Schaut das Wunder!  
Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.  
Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens;  
Noch ein Zwölftel dazu sproßt' auf der Wange der Bart;  
Dazu ein Siebentel noch, da schloß er das Bündnis der Ehe,  
Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn.  
Wehe, das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre  
Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag.  
Drauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer  
von sich scheuchend auch er kam an das irdische Ziel.

Wie alt ist Diophant geworden?

Ein Punkt zur Klärung: Der Sohn erreicht die Hälfte des Gesamtalters des Vaters (nicht die Hälfte des Alters des Vaters zum Zeitpunkt des Todes des Sohnes).