Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(4 Punkte)* Formulieren Sie bei jeder der folgenden vier Formeln aus Kapitel 5, was die genannten Objekte sind und in welcher Situation die Formel gilt.

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}(g \circ f) &= \mathrm{Mat}(g) \cdot \mathrm{Mat}(f), \\ f(\mathcal{A}) &= \mathcal{B} \cdot M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A}), \\ M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A})^{-1} &= M(\mathcal{A}, f^{-1}, \mathcal{B}), \\ M(\widetilde{\mathcal{B}}, f, \widetilde{\mathcal{A}}) &= M(\widetilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}) \cdot M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{A}}). \end{aligned}$$

2. *(1+1,5+1,5 Punkte)*

(a) Die Matrix $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist invertierbar. Bestimmen Sie B^{-1}.

(b) Die Tupel

$$\mathcal{B}^{(4)} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}^{(3)} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

sind die Standardbasen der $\mathbb{R}$-Vektorräume $M(4 \times 1, \mathbb{R})$ und $M(3 \times 1, \mathbb{R})$. Die Tupel

$$\mathcal{A} = (\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

sind andere Basen von $M(4 \times 1, \mathbb{R})$ beziehungsweise von $M(3 \times 1, \mathbb{R})$. Geben Sie (ohne Begründung) die Basiswechselmatrizen $M(\mathcal{B}^{(3)}, \mathcal{B})$, $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}^{(3)})$ und $M(\mathcal{B}^{(4)}, \mathcal{A})$ an. ($M(\mathcal{A}, \mathcal{B}^{(4)})$ brauchen Sie nicht zu bestimmen.)

(c) Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f : M(4 \times 1, \mathbb{R}) &\longrightarrow M(3 \times 1, \mathbb{R}), \\ x &\longmapsto C \cdot x \end{aligned}$$

wobei $C \in M(3 \times 4, \mathbb{R})$ durch

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie $M(\mathcal{B}^{(3)}, f, \mathcal{B}^{(4)})$ und $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{A})$.

Bitte wenden!

3. *(4 Punkte)* Gegeben seien die folgenden Abbildungen des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}[t]_{\leq 4}$ der reellen Polynome vom Grad kleiner gleich vier:

$$f_1 : \mathbb{R}[t]_{\leq 4} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 4}, \qquad g(t) \mapsto g(t+1),$$
$$f_2 : \mathbb{R}[t]_{\leq 4} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 4}, \qquad g(t) \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(g(t-1)).$$

Beide Abbildungen sind linear und damit Endomorphismen des obigen Vektorraumes.

Weiter sei die Basis $\mathcal{B} = (1, t, t^2, t^3, t^4)$ von $\mathbb{R}[t]_{\leq 4}$ gewählt.

Berechnen Sie die Matrizen $M(\mathcal{B}, f_1, \mathcal{B})$ und $M(\mathcal{B}, f_2, \mathcal{B})$ und deren Ränge.

4. *(4 Punkte)* Sei U der von $sin(x)$ und $cos(x)$ erzeugte Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Die Ableitung $\frac{d}{dx} : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist eine lineare Abbildung (siehe Beispiele 5.2). Das Tupel $\mathcal{B} = (sin(x), cos(x))$ ist eine Basis von U (das brauchen Sie nicht zu beweisen).

   (a) Zeigen Sie, dass $\frac{d}{dx}$ einen Endomorphismus von U induziert.

   (b) Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Matrix $M(\mathcal{B}, \left(\frac{d}{dx}\right)^n, \mathcal{B})$.

Abgabe bis Donnerstag, den 02. Dezember 2010, zwischen Vorlesung und großer Übung im Hörsaal.