Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Ralf Kurbel

Blatt 10
17.11.2010

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

1. *(1+1+2 Punkte)* Sei $E_{ij} \in M(n \times n, K)$ definiert durch

$$E_{ij} := (a_{st}) \quad \text{mit} \quad a_{st} := \begin{cases} 1 & s = i, t = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere gilt mit dieser Definition:

$$E_n = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} \quad \text{und} \quad Z_{II}^{mat}(\lambda, i, j) = \lambda E_{ji} + E_n.$$

   (a) Zeigen Sie:

$$E_{ij} E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & j = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (b) Zeigen Sie:

$$\left(Z_{II}^{mat}(\lambda, i, j)\right)^{-1} = Z_{II}^{mat}(-\lambda, i, j).$$

   (c) Wird eine Matrix A mit dem Gauß-Algorithmus aus Satz 4.7 in Zeilenstufenform gebracht, sind dazu nur Zeilenumformungen vom Typ III und Typ II nötig.
   Sei nun $A \in M(n \times n, K)$ eine Matrix, in der beim Gauß-Algorithmus nur Zeilenumformungen vom Typ II nötig sind, und sei $R \in M(n \times n, K)$ die resultierende Matrix in Zeilenstufenform. Dann läßt sich der Gauß-Algorithmus durch folgendes Produkt von Matrizen beschreiben:

$$L_t \dots L_1 \cdot A = R \quad \text{mit} \quad L_k := Z_{II}^{mat}(\lambda_k, i_k, j_k) \quad \text{für geeignete } \lambda_k, i_k, j_k.$$

   Daraus folgt:

$$A = L_1^{-1} \dots L_t^{-1} R = LR \quad \text{mit} \quad L := \prod_{i=1}^{t} L_i^{-1}.$$

   Berechnen Sie nun L und R nach obigem Schema für

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & -8 \\ 6 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

2. *(1+1+2 Punkte)* Sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen und $\mathbb{F}_q^n$ der n-dimensionale $\mathbb{F}_q$-Vektorraum aller n-Tupel über $\mathbb{F}_q$.

   (a) Sei $U \subseteq \mathbb{F}_q^n$ ein Untervektorraum der Dimension k. Berechnen Sie $|U|$.

   (b) Berechnen Sie, wieviele Basen $\mathbb{F}_q^n$ hat.
   (Hinweis: Blatt 8, Aufgabe 4.b.)

   (c) Nach Satz 4.13 entsprechen die Basen des K-Vektorraumes K^n eineindeutig (bijektiv zuordbar) den invertierbaren Matrizen aus $M(n \times n, K)$ und somit der Größe der Gruppe $GL(n, K)$. Daher hat nach Teil (b) die Gruppe $GL(3, \mathbb{F}_2)$ die Ordnung 168.
   Berechnen Sie die Ordnung der Gruppenelemente

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{F}_2).$$

Bitte wenden !!!

3. *(2+2+0 Punkte)* Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, und sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (a) (2P) $\quad f$ injektiv $\iff$ $\big(f(v_i)\big)_{i\in I}$ ist linear unabhängig.

   (b) (2P) $\quad f$ surjektiv $\iff$ $\big(f(v_i)\big)_{i\in I}$ ist ein Erzeugendensystem von W.

   (c) (0P) $\quad f$ bijektiv $\iff$ $\big(f(v_i)\big)_{i\in I}$ ist eine Basis von W.

4. *(4 Punkte)* Invertieren Sie die folgenden vier Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{über} \quad \mathbb{Q}, \quad D := \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \in M(2\times 2, \mathbb{F}_{11}).$$

Abgabe bis Donnerstag, den 25. November 2010, zwischen Vorlesung und großer Übung im Hörsaal.