Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Ralf Kurbel

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

(1) *(4 Punkte)* Geben Sie in einer Tabelle (wie in der Vorlesung) an, ob die folgenden vier Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Bitte geben Sie zu jeder der vier Funktionen eine kurze Begründung (eine bis drei Zeilen).

$f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto x^4.$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (-x_1, -x_2).$

$f_3 : S_4 \to \mathbb{N}, \quad \sigma \mapsto \sigma(1) + \sigma(2) + \sigma(3) + \sigma(4).$

$$f_4 : \{(a,b) \mid a,b \in \{1,\dots,4\}, a<b\} \to S_4, \quad (a,b) \mapsto \sigma \text{ mit } \sigma(i) := \begin{cases} i & i \notin \{a,b\}, \\ b & i = a, \\ a & i = b. \end{cases}$$

(2) *(4 Punkte)* Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ zwei Abbildungen. Beweisen Sie:

$$f \circ g = id_Y \text{ und } g \circ f = id_X \quad \Longrightarrow \quad f \text{ und } g \text{ sind bijektiv.}$$

(3) *(4 Punkte)*

Für die Menge $G := \{\alpha, \omega\}$ sei folgende Verknüpfungstafel gegeben:

$*$	α	ω
α	α	ω
ω	ω	α

Zeigen Sie, daß $(G, *)$ eine abelsche Gruppe ist, und geben Sie deren neutrales Element an. Geben Sie außerdem zu jedem Element von G das zugehörige Inverse an.

(4) *(4 Punkte)* Es sei $\sigma \in S_8$ die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 2 & 3 & 4 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie für jede der Zahlen $i = 1, ..., 8$ die kleinste natürliche Zahl n mit $\sigma^n(i) = i$.

b) Bestimmen Sie σ^{-1}, σ^{499}, σ^{500} und σ^{1007}.

Abgabe bis Donnerstag, den 16.09.2010 um 10:00 Uhr in A5.