Zwischenklausur zur Linearen Algebra I HS 2010, 23.10.2010
Universität Mannheim, Prof. Dr. C. Hertling, Ralf Kurbel

Name: Emil Mustermann
Matrikelnummer: 12345678
Sitzplatznummer: 2

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist. Es können somit 48 Punkte zur Zulassung für die Hauptklausur erworben werden.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vor- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch wird die Klausur nicht gewertet.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Definieren Sie, was eine Gruppe ist.

ii.) (1P) Sei $f\colon G \longrightarrow H$ eine Abbildung zwischen zwei Gruppen G und H. Definieren Sie, wann f ein Gruppenhomomorphismus ist.

iii.) (1P) Sei $f\colon G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus zwischen den Gruppen G und H. Definieren Sie den Kern von f.

iv.) (2P) Sei G eine endliche Gruppe und U eine Untergruppe von G. Formulieren Sie den Satz von Lagrange für diese Situation.

v.) (2P) Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe. Geben Sie zwei Bedingungen dafür an, daß U ein Normalteiler in G ist.

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Kreuzen Sie an, ob die jeweilige Aussage stimmt oder nicht. Bei einer richtigen Antwort gibt es einen Punkt, bei keiner Antwort null Punkte, und bei einer falschen Antwort einen halben Minuspunkt.
Die gesamte Aufgabe wird mit null Punkten gewertet, falls sich aus den Antworten ein negativer Punktewert ergibt.

	Ja	Nein
Die Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ mit $f(x) := x^2$ ist injektiv.		
S_5 hat 25 Elemente.		
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Körper.		
Jede zyklische Gruppe ist abelsch.		
Die Quotientengruppe S_4/A_4 ist isomorph zu $\mathbb{Z}_4$.		
Die Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ mit $f(x) := x+1$ ist ein Gruppenhomorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Q}, +)$.		
Es sei $f\colon \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. $\ker(f)$ enthält dann 18 Elemente.		
Sei G eine Gruppe mit $g^2 = e$ für alle $g \in G$. Dann ist G eine abelsche Gruppe.		

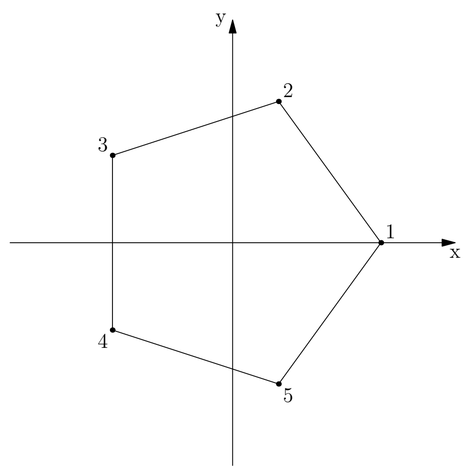
Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Es seien folgende Permutationen gegeben:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \pi := (1\ 2)(4\ 2)(3\ 4)(5\ 9)(1\ 2)(3\ 4)$$

Schreiben Sie beide Permutationen in Zykelschreibweise mit disjunkten Trägern und bestimmen Sie das Signum beider Permutationen.

ii.) (4P) In folgender Skizze ist ein reguläres Fünfeck eingezeichnet.



Die Diedergruppe $D_5 \subseteq S_5$ operiert auf seinen Ecken. Tragen Sie in folgende Tabelle ein, durch welche Drehung oder Spiegelung der Ebene das jeweilige Element der D_5 beschrieben wird. Eine Drehung bedeutet dabei eine Drehung um den Ursprung gegen den Urzeigersinn, deren Winkel Sie angeben sollen. Eine Spiegelung bedeutet eine Spiegelung an einer Geraden, die Sie folgendermaßen beschreiben sollen: Die Gerade durch die Punkte g_1, g_2, wobei g_i entweder einer der Punkte von 1 bis 5 ist, oder ein Mittelpunkt der Strecke zwischen zweien dieser Punkte (z.B. M_{34} als Mittelpunkt der Strecke zwischen den Punkten 3 und 4).

id	: Drehung, Winkel 0^0
(25)(34)	: Spiegelung, Gerade durch 1 und M_{34}
(12345)	:
(24)(15)	:
(14)(23)	:
(15432)	:
(13524)	:
(35)(12)	:
(13)(54)	:
(14253)	:

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Berechnen Sie alle Erzeuger der zyklischen Gruppe $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +)$.

ii.) (4P) Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie die Zwischenschritte Ihrer Rechnung dabei an:

$$\begin{aligned}
[73]_4 \cdot [41]_4 = [x_1]_4 &\quad \text{mit} \quad x_1 \in \{0, \ldots, 3\} \\
355 \cdot 784 + 4 \cdot 13 \equiv x_2 \bmod 5 &\quad \text{mit} \quad x_2 \in \{0, \ldots, 4\} \\
[999 \cdot 78374 + 6 \cdot 81 + 11 \cdot 2]_9 = [x_4]_9 &\quad \text{mit} \quad x_4 \in \{0, \ldots, 8\} \\
5^{1030789} \equiv x_3 \bmod 6 &\quad \text{mit} \quad x_3 \in \{0, \ldots, 5\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Geben Sie die Linksnebenklassen der Untergruppe $\langle(13)\rangle$ von S_3 als Mengen an.

ii.) (4P) Geben Sie ein Element $\sigma \in S_7$ mit maximaler Ordnung an, d.h. für alle $\pi \in S_7$ soll gelten: $o(\pi) \leq o(\sigma)$. Begründen Sie Ihre Wahl.

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Es sei X eine endliche Menge und $G \subseteq Bij(X, X)$ eine endliche Untergruppe. Für $x \in X$ seien definiert:

$$G(x) := \{\, g(x) \mid g \in G \,\} \subseteq X \quad \text{und} \quad G_x := \{\, g \in G \mid g(x) = x \,\} \subseteq G.$$

Zeigen Sie, daß G_x eine Untergruppe von G ist, und beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Lagrange die Orbitformel

$$|G| = |G_x| \cdot |G(x)|.$$