Klausur zur Linearen Algebra I HS 2010, 12.02.2011
Universität Mannheim, Prof. Dr. C. Hertling, Ralf Kurbel

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (1P) Definieren Sie für $n \in \mathbb{N}$ die symmetrische Gruppe S_n.

ii.) (2P) Sei G eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Geben Sie zwei äquivalente Bedingungen dafür an, daß U ein Normalteiler in G ist.

iii.) (3P) Sei $f\colon V \longrightarrow W$ ein lineare Abbildung zwischen zwei endlichdimensionalen K-Vektorräumen. Definieren Sie den Kern von f und den Rang von f, und vervollständigen Sie die folgende Gleichung:

$$\dim_K \ker(f) + \operatorname{rang}(f) =$$

iv.) (2P) Sei $f\colon V \longrightarrow W$ ein lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen. Geben Sie zwei äquivalente Bedingungen dafür an, daß f injektiv ist.

Lösung:

i.) Mögliche Definitionen der symmetrischen Gruppe S_n sind z.B.:
- S_n ist die Menge $\{\, f\colon \{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,n\} \mid f \text{ bijektiv} \,\}$ zusammen mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung.
- S_n ist $(Bij(X,X),\circ)$ mit $X := \{1,\dots,n\}$.

ii.) Zwei der folgenden drei Bedingungen würden reichen:
- $gU = Ug$ für alle $g \in G$.
- $gUg^{-1} = U$ für alle $g \in G$.
- Es gibt einen Gruppenhomomorphismus $\phi\colon G \longrightarrow H$ mit $\ker\phi = U$.

iii.) a.) $\ker(f) := \{\, v \in V \mid f(v) = 0 \,\}$.

b.) $\operatorname{rang}(f) := \dim_K \operatorname{im}(f)$ oder $\operatorname{rang}(f) := \dim_K f(V)$.

c.) $\dim_K \ker(f) + \operatorname{rang}(f) = \dim_K V$.

iv.) Zwei der folgenden drei Bedingungen würden reichen:
- $v_1 \neq v_2 \quad\Longrightarrow\quad f(v_1) \neq f(v_2)$.
- $f(v_1) = f(v_2) \quad\Longrightarrow\quad v_1 = v_2$.
- $\ker(f) = \{0\}$.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Kreuzen Sie an, ob die jeweilige Aussage stimmt oder nicht. Bei einer richtigen Antwort gibt es einen Punkt, bei keiner Antwort null Punkte, und bei einer falschen Antwort ebenfalls null Punkte (es werden keine Punkte für falsche Antworten abgezogen!).

	Ja	Nein
Jede injektive Abbildung von S_3 nach $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist auch surjektiv.	X	
Es gibt einen Vektorraum mit 8 Elementen.	X	
Es gibt keine zyklische Gruppe mit 32 Elementen, da 32 keine Primzahl ist.		X
Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ besitzt nur die Basis (1).		X
Jedes endliche Erzeugendensystem eines Vektorraums enthält auch eine Basis.	X	
Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) := (3x+y,4)$ ist eine lineare Abbildung.		X
Ist $f\colon A \longrightarrow B$ surjektiv, so gibt es eine Abbildung $g\colon B \longrightarrow A$ mit $f \circ g = id_B$.	X	
Eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist invertierbar, wenn genau zwei Einträge ungleich Null sind und $a + c \neq b - d$ gilt.		X

Lösung:

i.) Es ist $|S_3| = |\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}| = 6$, beide Mengen/Gruppen sind also gleichgroß. Ist f eine injektive Abbildung von S_3 nach $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, so hat sie lauter verschiedene Bilder ($a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$), so daß aus Ordnungsgründen alle Elemente aus $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ getroffen werden müssen: also ist f auch surjektiv.

ii.) Zum Beispiel die beiden $\mathbb{F}_2$-Vektorräume $\mathbb{F}_2^3$ und $(P(M), \ominus)$ mit $M := \{1,2,3\}$. (Siehe auch Blatt 9, Aufgabe 1.)

iii.) Falsch: $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$ ist zyklisch und hat die Ordnung 32.

iv.) Falsch: Für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist (a) eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}$.

v.) Satz 3.15.a).

vi.) Falsch: $f\big((0,0)\big) = (0,4) \neq (0,0)$, d.h. die Null wird nicht auf die Null abgebildet.

vii.) Da f surjektiv ist, gibt es für jedes $b \in B$ ein $a_b \in A$ mit $f(a_b) = b$. Dann ist $g\colon B \longrightarrow A$ mit $g(b) := a_b$ eine Abbildung, für die gilt: $(f \circ g)(b) = f(a_b) = b$ für alle $b \in B$, d.h. $f \circ g = id_B$.

viii.) Falsch: $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ist eine Matrix, die den Bedingungen genügt, aber den Rang eins hat und damit nicht invertierbar ist.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Die Diedergruppe $D_4 \subseteq S_4$ ist gegeben durch:

$$D_4 = \{\, id,\ (1\ 2\ 3\ 4),\ (1\ 3),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4\ 3\ 2),\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3),\ (2\ 4)\,\}.$$

Bestimmen Sie $D_4 \cap A_4$.

ii.) (4P) Bestimmen Sie die zyklische Untergruppe von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, die von dem Element $[8]_{12} \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ erzeugt wird, und alle Linksnebenklassen dieser Untergruppe.

Lösung:

i.) A_n ist definiert durch: $A_n := \{\, \sigma \in S_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\,\}$. Daraus folgt sofort:

$$D_4 \cap A_4 = \{\, \sigma \in D_4 \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\,\} = \{id,\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3)\}.$$

ii.) In der additiven Gruppe $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ergibt sich die von einem $g \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ erzeugte Untergruppe $\langle g\rangle$ als Menge $\{g, g+g, g+g+g, \ldots\}$, und der Summationsprozeß kann abgebrochen werden, wenn das neutrale Element $[0]_{12}$ erreicht wurde (da $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ endlich ist, reicht die Summation, die Inversen entstehen automatisch mit!). Im Falle $g = [8]_{12}$ liefert dies:

$$\langle [8]_{12}\rangle = \{[8]_{12},\ \underbrace{[4]_{12}}_{[8]_{12}+[8]_{12}},\ \underbrace{[0]_{12}}_{[8]_{12}+[8]_{12}+[8]_{12}}\}.$$

Die Untergruppe $\langle [8]_{12}\rangle$ hat drei Elemente, so daß es nach dem Satz von Lagrange vier Nebenklassen dieser Untergruppe gibt:

Lagrange: Gruppengröße = Untergruppengröße mal Anzahl ihrer Nebenklassen.

Zum Bilden der vier Nebenklassen kann jeweils als neuer Repräsentant ein Element gewählt werden, der in den vorher konstruierten Nebenklassen nicht auftrat, da die Vereinigung aller Nebenklassen ja die ganze Gruppe liefern muß:

$$\begin{aligned} \langle [8]_{12}\rangle &: \quad \{[0]_{12}, [4]_{12}, [8]_{12}\} \\ [1]_{12} + \langle [8]_{12}\rangle &: \quad \{[1]_{12}, [5]_{12}, [9]_{12}\} \\ [2]_{12} + \langle [8]_{12}\rangle &: \quad \{[2]_{12}, [6]_{12}, [10]_{12}\} \\ [3]_{12} + \langle [8]_{12}\rangle &: \quad \{[3]_{12}, [7]_{12}, [11]_{12}\} \end{aligned}$$

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Invertieren Sie die folgenden beiden Matrizen und notieren Sie beim Invertieren von A auch in den Zwischenschritten alle Matrizeneinträge mit den Zahlen $\{0,\dots,4\}$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_5), \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R}).$$

Lösung:

Inverse von A:

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \xrightarrow[Z_{II}(1,1,3)]{Z_{II}(2,1,2)} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow[Z_{II}(1,3,1)]{Z_{II}(4,3,2)} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{Z_{II}(1,2,1)} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow[Z_{I}(3,3)]{Z_{I}(2,2)} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}$$

Inverse von B:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow[Z_{III}(1,3)]{Z_{III}(2,3)} \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow[Z_{II}(-1,2,4)]{Z_{II}(-1,2,3)}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow[Z_{II}(-1,3,1)]{Z_{II}(-1,4,1)} \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Somit gilt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Es sei folgende lineare Abbildung gegeben:

$$f\colon M(4\times 1,\mathbb{R}) \longrightarrow M(3\times 1,\mathbb{R}), \qquad \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+2x_2+3x_3+4x_4\\ -1x_1-2x_2-2x_3-2x_4\\ x_1+2x_2+4x_3+6x_4 \end{pmatrix}$$

i.) (4P) Lösen Sie das Gleichungssystem $\mathrm{Mat}(f)\cdot x = b$ mit $b := (2,-3,1)^{\mathrm{tr}}$.

ii.) (4P) Geben Sie eine Basis von $\ker(f)$ und $\mathrm{im}(f)$ an.

Lösung:

i.) Die Matrix $\mathrm{Mat}(f)$ ergibt sich, indem spaltenweise die Bilder der Standardbasisvektoren $e_1,\dots,e_4 \in M(4\times 1,\mathbb{R})$ unter f in sie eingetragen werden:

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & -2 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Damit läßt sich per Gauß-Algorithmus errechnen:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 2\\ -1 & -2 & -2 & -2 & -3\\ 1 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{array} \xrightarrow[Z_{II}(-1,1,3)]{Z_{II}(1,1,2)} \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \xrightarrow[Z_{II}(-3,2,1)]{Z_{II}(-1,2,3)} \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Es ergibt sich sofort:

$$v_{\mathrm{inh}} = \begin{pmatrix} 5\\ 0\\ -1\\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} -2\\ 0\\ 2\\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems $\mathrm{Mat}(f)\cdot x = b$ ist dann:

$$\mathrm{Lös}\big(\mathrm{Mat}(f), b\big) = v_{\mathrm{inh}} + \mathrm{span}(v_2, v_4).$$

ii.) Die Lösungsmenge aus Teil i) läßt sich auch schreiben als

$$\mathrm{Lös}\big(\mathrm{Mat}(f), b\big) = v_{\mathrm{inh}} + \mathrm{span}(v_2, v_4) = v_{\mathrm{inh}} + \mathrm{Lös}\big(\mathrm{Mat}(f), 0\big) = v_{\mathrm{inh}} + \ker(f),$$

denn es gilt:

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{\, x \in M(4\times 1,\mathbb{R}) \mid f(x) = 0 \,\} = \{\, x \in M(4\times 1,\mathbb{R}) \mid \mathrm{Mat}(f)\cdot x = 0 \,\}\\ &= \mathrm{Lös}\big(\mathrm{Mat}(f), 0\big). \end{aligned}$$

Dann ist (v_2, v_4) aber eine Basis des zweidimensionalen Kerns von f.

Die Spalten von $\mathrm{Mat}(f)$ sind die Bilder der Basisvektoren des Urraumes, und die Bilder einer Basis bilden ein Erzeugendensystem des Bildes. Somit kann aus den Spalten von $\mathrm{Mat}(f)$ ein maximal linear unabhängiges System ausgewählt werden, und maximal heißt in diesem Fall $\mathrm{rg}\big(\mathrm{Mat}(f)\big) = 2$, da der Rang einer Matrix die Dimension des Bildes angibt.

Nachdem die Matrix $\mathrm{Mat}(f)$ durch den Gauß-Algorithmus in Zeilen-Stufen-Form überführt worden ist, läßt sich aus dieser Zeilen-Stufen-Form ablesen,

Matrikelnummer:

welche Spalten der ursprünglichen Matrix $\mathrm{Mat}(f)$ linear unabhängig sind: genau diejenigen, bei denen eine neue Treppenstufe beginnt. Somit sind die Spalten mit den Nummern 1 und 3 von $\mathrm{Mat}(f)$ linear unabhängig und bilden eine Basis von $\mathrm{im}(f)$.

Basis des Kerns: $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ Basis des Bildes: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Es sei $\phi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\phi(x_1, \ldots, x_4) := \sum_{i=1}^{4} x_i.$$

Geben Sie eine Basis von $\ker(\phi)$ an.

ii.) (4P) Sei G eine Gruppe, und es gelte $g^2 = e$ für alle $g \in G$ (e sei das neutrale Element von G). Beweisen Sie, daß G dann eine abelsche Gruppe ist.

Lösung:

i.) Die Aufgabe könnte gelöst werden, indem ϕ durch eine Matrix beschrieben und dann analog zu Aufgabe 5 verfahren wird. Hier wird jedoch eine direkte Lösung vorgeführt:
ϕ ist eine surjektive Abbildung, denn es gilt $\phi(r, 0, 0, 0) = r$ für alle $r \in \mathbb{R}$, und so liefert der Rangsatz (siehe auch Aufgabe 1.iii):

$$\dim_{\mathbb{R}} \ker(\phi) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 - \operatorname{rang}(\phi) = 4 - 1 = 3.$$

Es reicht, drei linear unabhängige Vektoren im Kern zu finden, da diese dann als maximal linear unabhängiges System eine Basis desselben sind.
Für den Kern von ϕ gilt:

$$\ker(\phi) = \{\, (x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \text{Koeffizientensumme} = 0 \,\},$$

und offensichtilich sind $(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1)$ und $(0, 0, 1, -1)$ somit aus $\ker(\phi)$. Diese Vektoren sind auch linear unabhängig, denn es gilt:

$$a(1, 0, 0, -1) + b(0, 1, 0, -1) + c(0, 0, 1, -1) = (a, b, c, -a - b - c) = (0, 0, 0, 0)$$
$$\Longrightarrow \quad a = b = c = 0.$$

Damit bilden die oben genannten Vektoren eine Basis von $\ker(\phi)$.

ii.) Es seien $a, b \in G$, und es ist zu zeigen, daß dann $ab = ba$ gilt. Nach Voraussetzung ist

$$abab = (ab)^2 = e,$$

und wird diese Gleichung von links mit a und von rechts mit b multipliziert, so ergibt sich daraus:

$$aababb = aeb.$$

Wegen $aa = a^2 = e$ und $bb = b^2 = e$ können auf der linken Seite diese Terme gekürzt werden, und wird noch aeb zu ab zusammengefaßt, liefert dies wie gewünscht:

$$ba = ab.$$