Klausur zur Linearen Algebra I HS 2010, 12.02.2011
Universität Mannheim, Prof. Dr. C. Hertling, Ralf Kurbel

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (1P) Definieren Sie für $n \in \mathbb{N}$ die symmetrische Gruppe S_n.

ii.) (2P) Sei G eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Geben Sie zwei äquivalente Bedingungen dafür an, daß U ein Normalteiler in G ist.

iii.) (3P) Sei $f\colon V \longrightarrow W$ ein lineare Abbildung zwischen zwei endlichdimensionalen K-Vektorräumen. Definieren Sie den Kern von f und den Rang von f, und vervollständigen Sie die folgende Gleichung:

$$\dim_K \ker(f) + \operatorname{rang}(f) =$$

iv.) (2P) Sei $f\colon V \longrightarrow W$ ein lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen. Geben Sie zwei äquivalente Bedingungen dafür an, daß f injektiv ist.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Kreuzen Sie an, ob die jeweilige Aussage stimmt oder nicht. Bei einer richtigen Antwort gibt es einen Punkt, bei keiner Antwort null Punkte, und bei einer falschen Antwort ebenfalls null Punkte (es werden keine Punkte für falsche Antworten abgezogen!).

	Ja	Nein
Jede injektive Abbildung von S_3 nach $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist auch surjektiv.		
Es gibt einen Vektorraum mit 8 Elementen.		
Es gibt keine zyklische Gruppe mit 32 Elementen, da 32 keine Primzahl ist.		
Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ besitzt nur die Basis (1).		
Jedes endliche Erzeugendensystem eines Vektorraums enthält auch eine Basis.		
Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) := (3x+y,4)$ ist eine lineare Abbildung.		
Ist $f\colon A \longrightarrow B$ surjektiv, so gibt es eine Abbildung $g\colon B \longrightarrow A$ mit $f \circ g = id_B$.		
Eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist invertierbar, wenn genau zwei Einträge ungleich Null sind und $a+c \neq b-d$ gilt.		

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Die Diedergruppe $D_4 \subseteq S_4$ ist gegeben durch:

$$D_4 = \{\, id,\ (1\ 2\ 3\ 4),\ (1\ 3),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4\ 3\ 2),\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3),\ (2\ 4)\,\}.$$

Bestimmen Sie $D_4 \cap A_4$.

ii.) (4P) Bestimmen Sie die zyklische Untergruppe von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, die von dem Element $[8]_{12} \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ erzeugt wird, und alle Linksnebenklassen dieser Untergruppe.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Invertieren Sie die folgenden beiden Matrizen und notieren Sie beim Invertieren von A auch in den Zwischenschritten alle Matrizeneinträge mit den Zahlen $\{0, \dots, 4\}$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_5), \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R}).$$

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Es sei folgende lineare Abbildung gegeben:

$$f\colon M(4\times 1,\mathbb{R}) \longrightarrow M(3\times 1,\mathbb{R}), \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ -1x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \end{pmatrix}$$

i.) (4P) Lösen Sie das Gleichungssystem $\mathrm{Mat}(f)\cdot x = b$ mit $b := (2,-3,1)^{\mathrm{tr}}$.

ii.) (4P) Geben Sie eine Basis von $\ker(f)$ und $\mathrm{im}(f)$ an.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Es sei $\phi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\phi(x_1, \ldots, x_4) := \sum_{i=1}^{4} x_i.$$

Geben Sie eine Basis von $\ker(\phi)$ an.

ii.) (4P) Sei G eine Gruppe, und es gelte $g^2 = e$ für alle $g \in G$ (e sei das neutrale Element von G). Beweisen Sie, daß G dann eine abelsche Gruppe ist.

Matrikelnummer: