Klausur zur Linearen Algebra I HS 2010, 17.12.2010
Universität Mannheim, Prof. Dr. C. Hertling, Ralf Kurbel

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (3P) Sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen V und W. Definieren Sie, wann f eine lineare Abbildung ist. Definieren Sie außerdem den Kern von f.

ii.) (1P) Sei G eine endliche Gruppe und U eine Untergruppe von G. Formulieren Sie den Satz von Lagrange für diese Situation.

iii.) (4P) Sei V ein K-Vektorraum, und sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren aus V. Geben Sie vier äquivalente Bedingungen dafür an, daß $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V ist.

Lösung:

i.) f ist eine lineare Abbildung, falls gilt:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) && \text{für alle } x, y \in V, \\ f(\alpha x) &= \alpha f(x) && \text{für alle } \alpha \in K,\ x \in V. \end{aligned}$$

Der Kern von f ist definiert durch:

$$\ker(f) := \{\, x \in V \mid f(x) = 0 \,\}.$$

ii.) Ist G eine endliche Gruppe, so ist U eine endliche Untergruppe, die Menge G/U der Linksnebenklassen von U ist endlich, und es gilt:

$$|G| = |U| \cdot |G/U|.$$

iii.) 1.) $(v_i)_{i\in I}$ ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

2.) $(v_i)_{i\in I}$ ist ein minimales Erzeugendensystem.

3.) $(v_i)_{i\in I}$ ist ein maximal linear unabhängiges System.

4.) Jedes $x \in V$ läßt sich eindeutig als Linearkombination der Vektoren aus $(v_i)_{i\in I}$ schreiben.

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Kreuzen Sie an, ob die jeweilige Aussage stimmt oder nicht. Bei einer richtigen Antwort gibt es einen Punkt, bei keiner Antwort null Punkte, und bei einer falschen Antwort ebenfalls null Punkte (es werden keine Punkte für falsche Antworten abgezogen!).

	Ja	Nein
Es gibt eine injektive Abbildung von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{N}$, die nicht surjektiv ist.	X	
S_8 enthält ein Element der Ordnung 15.	X	
$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist ein Körper mit vier Elementen.		X
Jede abelsche Gruppe ist zyklisch.		X
$(1, 2, 3)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$.		X
Die Abbildung $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$ ist eine lineare Abbildung zwischen den $\mathbb{Q}$-Vektorräumen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.		X
Kerne von linearen Abbildungen sind immer Vektorräume.	X	
Eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist immer invertierbar, wenn alle Einträge a, b, c, d ungleich Null sind.		X

Lösung: Erläuterung zu den Lösungen (waren in der Klausur nicht gefragt):

i.) Bekanntermaßen existiert eine Bijektion $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$. Weiter sei $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert durch $g(n) := n + 1$. Dann ist $g \circ f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ als Komposition injektiver Abbildungen injektiv, aber $1 \notin \operatorname{im}(g \circ f)$ und somit die Komposition keine surjektive Abbildung.

ii.) $(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7\ 8)$ ist ein Element der Ordnung $15 = \mathrm{kgV}(3{,}5)$ in S_8.

iii.) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ enthält zwar vier Elemente, ist aber kein Körper, da $2 \cdot 2 = 0$ in diesem Ring gilt und er somit Nullteiler enthält. Körper jedoch besitzen keine Nullteiler (Lemma 2.4.d oder Bemerkung 2.7).

iv.) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist eine abelsche Gruppe, aber nicht zyklisch.

v.) Der $\mathbb{R}^3$ hat die Dimension drei, somit muß jede Basis drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ enthalten, und nicht nur einen.

vi.) Wegen $f(2 \cdot 2) = 16 \neq 8 = 2f(2)$ ist f keine lineare Abbildung.

vii.) Satz 5.3.c).

viii.) $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist nach Satz 4.13.e) genau dann invertierbar, falls $ad - bc \neq 0$ gilt. Für $a := b := c := d := 1$ ist die Matrix somit nicht invertierbar, obwohl alle Einträge ungleich null sind.

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (3P) Es seien folgende Permutationen gegeben:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 6 & 1 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \pi := (1\,2\,4)(4\,2\,8)(3\,4\,6)(5\,9\,1)(1\,2\,3)(3\,4)$$

Schreiben Sie beide Permutationen in Zykelschreibweise mit disjunkten Trägern und bestimmen Sie das Signum und die Ordnung beider Permutationen.

ii.) (5P) Finden Sie in S_5 eine zyklische Untergruppe der Ordnung 6 und geben Sie alle Elemente in Zykelschreibweise mit disjunkten Trägern sowie deren Signum an.

Lösung:

i.) In Zykelschreibweise mit disjunkten Trägern haben die Permutationen σ und π die Form:

$$\sigma = (1\ 5)(2\ 4\ 6\ 8\ 7\ 3) \quad \text{und} \quad \pi = (1\ 8)(2\ 4\ 5\ 9)(3\ 6).$$

Aus der Zykelschreibweise folgen sofort das Signum und die Ordnung der Permutationen:

$$\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{2-1} \cdot (-1)^{6-1} = 1, \qquad o(\sigma) = \operatorname{kgV}(2,6) = 6,$$
$$\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^{2-1} \cdot (-1)^{4-1} \cdot (-1)^{2-1} = -1, \qquad o(\pi) = \operatorname{kgV}(2,4,2) = 4.$$

ii.) $\pi := (1\ 2)(3\ 4\ 5) \in S_5$ ist ein Element der Ordnung $o(\pi) = \operatorname{kgV}(2,3) = 6$ und erzeugt somit eine zyklische Untergruppe

$$\langle \pi \rangle = \{ \pi, \pi^2, \pi^3, \pi^4, \pi^5, \pi^6 \}$$

der Ordnung sechs in S_5. Zur Berechnung des Signums der Elemente kann folgende Beziehung benutzt werden: $\operatorname{sign}(\pi^i) = \operatorname{sign}(\pi)^i$. Es folgt:

i	π^i	$\operatorname{sign}(\pi)^i$
1	$(1\ 2)(3\ 4\ 5)$	-1
2	$(3\ 5\ 4)$	1
3	$(1\ 2)$	-1
4	$(3\ 4\ 5)$	1
5	$(1\ 2)(3\ 5\ 4)$	-1
6	id	1

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Invertieren Sie die folgenden beiden Matrizen und notieren Sie beim Invertieren von A alle Matrizeneinträge mit den Zahlen $\{0, \ldots, 4\}$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_5), \qquad B := \begin{pmatrix} 9 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{Q}).$$

ii.) (4P) Bestimmen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ die folgende Matrix invertierbar ist, und geben Sie dazu die Inverse an:

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & a \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

Lösung:

i.) Die Matrix A kann z.B. mit Hilfe der Formel aus Satz 4.13.e) invertiert werden:

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{für } ad - bc \neq 0.$$

Somit folgt für A, wobei alle Rechnungen modulo 5 durchgeführt werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= 3^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix B kann die Inverse B^{-1} folgendermaßen berechnet werden:

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \xrightarrow{Z_{II}(-4,3,1)} \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \xrightarrow{Z_{II}(-2,1,3)}$$
$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 9 \end{array}\right. \xrightarrow{Z_{II}(-3,3,2)} \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -27 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 9 \end{array}\right. .$$

Es gilt somit:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 6 & 1 & -27 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

ii.) Nach Satz 4.13.e) gilt (siehe auch die Erläuterung zu Aufgabe 2.viii):

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{invertierbar} \iff a^2 - 3 \neq 0 \iff a^3 \neq 3 \iff a \notin \{\pm\sqrt{3}\}.$$

Dann folgt für $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$:

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 - 3} \begin{pmatrix} a & -3 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2-3} & \frac{-3}{a^2-3} \\ \frac{-1}{a^2-3} & \frac{a}{a^2-3} \end{pmatrix}.$$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Es sei folgende lineare Abbildung gegeben:

$$f\colon M(4\times 1,\mathbb{R}) \longrightarrow M(3\times 1,\mathbb{R}), \qquad \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+2x_2+3x_3+4x_4\\ 2x_1+x_2+5x_4\\ x_1-4x_2-9x_3\end{pmatrix}$$

i.) (4P) Lösen Sie das Gleichungssystem $\mathrm{Mat}(f)\cdot x = b$ mit $b := (1,2,3)^{\mathrm{tr}}$.

ii.) (4P) Geben Sie eine Basis von $\ker(f)$ und $\mathrm{im}(f)$ an.

Lösung:

i.) Die Matrix $\mathrm{Mat}(f)$ ergibt sich, indem spaltenweise die Bilder der Standardbasisvektoren $e_1,\dots,e_4 \in M(4\times 1,\mathbb{R})$ unter f in sie eingetragen werden:

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 0 & 5\\ 1 & -4 & -9 & 0\end{pmatrix}.$$

Damit läßt sich per Gauß-Algorithmus errechnen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 5 & 2\\ 1 & -4 & -9 & 0 & 3\end{array}\right) \xrightarrow[Z_{II}(-1,1,3)]{Z_{II}(-2,1,2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1\\ 0 & -3 & -6 & -3 & 0\\ 0 & -6 & -12 & -4 & 2\end{array}\right) \xrightarrow{Z_I(-\frac{1}{3},2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -6 & -12 & -4 & 2\end{array}\right) \xrightarrow{Z_{II}(6,2,3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2\end{array}\right) \xrightarrow{Z_I(\frac{1}{2},3)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[Z_{II}(-4,3,1)]{Z_{II}(-1,3,2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{Z_{II}(-2,2,1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right) \implies v_{\mathrm{inh}} = \begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1\\ 2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems $\mathrm{Mat}(f)\cdot x = b$ ist dann:

$$\mathrm{Lös}\big(\mathrm{Mat}(f), b\big) = v_{\mathrm{inh}} + \mathrm{span}(v_3).$$

ii.) Die Lösungsmenge aus Teil i) läßt sich auch schreiben als

$$\mathrm{Lös}\big(\mathrm{Mat}(f), b\big) = v_{\mathrm{inh}} + \mathrm{span}(v_3) = v_{\mathrm{inh}} + \mathrm{Lös}\big(\mathrm{Mat}(f), 0\big) = v_{\mathrm{inh}} + \ker(f),$$

denn es gilt:

$$\begin{aligned}\ker(f) &= \{\, x \in M(4\times 1,\mathbb{R}) \mid f(x) = 0 \,\} = \{\, x \in M(4\times 1,\mathbb{R}) \mid \mathrm{Mat}(f)\cdot x = 0 \,\}\\ &= \mathrm{Lös}\big(\mathrm{Mat}(f), 0\big).\end{aligned}$$

Dann ist (v_3) aber eine Basis des eindimensionalen Kerns von f.

Die Spalten von $\mathrm{Mat}(f)$ sind die Bilder der Basisvektoren des Urraumes, und die Bilder einer Basis bilden ein Erzeugendensystem des Bildes. Somit kann aus den Spalten von $\mathrm{Mat}(f)$ ein maximal linear unabhängiges System ausgewählt

werden, und maximal heißt in diesem Fall $\operatorname{rg}\big(\operatorname{Mat}(f)\big) = 3$, da der Rang einer Matrix die Dimension des Bildes angibt.
Nachdem die Matrix $\operatorname{Mat}(f)$ durch den Gauß-Algorithmus in Zeilen-Stufen-Form überführt worden ist, läßt sich aus dieser Zeilen-Stufen-Form ablesen, welche Spalten der ursprünglichen Matrix $\operatorname{Mat}(f)$ linear unabhängig sind: genau diejenigen, bei denen eine neue Treppenstufe beginnt. Somit sind die Spalten mit den Nummern $1, 2, 4$ von $\operatorname{Mat}(f)$ linear unabhängig und bilden eine Basis von $\operatorname{im}(f)$.

Das oben beschriebene Verfahren ist für jede Matrix anwendbar, um eine Basis des Bildes zu finden. Im Falle der Klausuraufgabe kann auch eine viel einfachere Lösung gefunden werden: wegen $\operatorname{rg}\big(\operatorname{Mat}(f)\big) = 3$ ist die Abbildung f surjektiv, da der Zielraum auch dreidimensional ist. Somit reicht es, irgendeine Basis des Zielraumes anzugeben, und die Standardbasisvektoren erfüllen diesen Zweck:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Geben Sie alle Elemente der Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$ an. Diese ist entweder zu S_3 oder $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ isomorph. Geben Sie entweder einen Isomorphismus zu einer der Gruppen an oder ein Argument, warum sie zu einer der beiden Gruppen nicht isomorph sein kann.

Lösung: Die Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$ ist die Gruppe der invertierbaren (2×2)-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Aus dem Aufgabentext ist sofort zu entnehmen, daß sie sechs Elemente enthält. Damit müssen aus den insgesamt 16 (2×2)-Matrizen über $\mathbb{F}_2$ (vier Einträge mit jeweils zwei Möglichkeiten 0 oder 1) also sechs invertierbare gefunden werden.
Nach Satz 4.13.e) ist eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ genau dann invertierbar, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt, wobei hier a, b, c, d die Werte 0 oder 1 annehmen können.
Offensichtlich ist $ab - cd = 0$, wenn keine, drei oder vier Variablen 0 sind (bei keiner 0 sind alle Werte 1 und die Matrix nicht invertierbar). Damit fallen von den 16 möglichen Matrizen schon $1+4+1 = 6$ (keine+drei+vier Nullen) Matrizen weg.
Wenn die Matrix zwei Nullen enthält, müssen diese auf einer Diagonalen liegen, denn es dürfen von den Produkten ad und bc nicht beide Null sein. Also fallen alle vier Matrizen weg, die eine Null-Zeile oder Null-Spalte enthalten.
Von den ursprünglichen 16 Matrizen sind nun schon 10 aussortiert, und alle anderen müssen somit invertierbar sein, was sich auch sofort mit obigen Formel verifizieren läßt. Es folgt also:

$$\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. für $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $B := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist $AB \neq BA$, und somit ist die Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$ nicht kommutativ. Dann kann Sie nicht zu $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ isomorph sein und muß zu S_3 isomorph sein.