Klausur zur Linearen Algebra I HS 2010, 17.12.2010
Universität Mannheim, Prof. Dr. C. Hertling, Ralf Kurbel

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (3P) Sei $f \colon V \longrightarrow W$ eine Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen V und W. Definieren Sie, wann f eine lineare Abbildung ist. Definieren Sie außerdem den Kern von f.

ii.) (1P) Sei G eine endliche Gruppe und U eine Untergruppe von G. Formulieren Sie den Satz von Lagrange für diese Situation.

iii.) (4P) Sei V ein K-Vektorraum, und sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren aus V. Geben Sie vier äquivalente Bedingungen dafür an, daß $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V ist.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Kreuzen Sie an, ob die jeweilige Aussage stimmt oder nicht. Bei einer richtigen Antwort gibt es einen Punkt, bei keiner Antwort null Punkte, und bei einer falschen Antwort ebenfalls null Punkte (es werden keine Punkte für falsche Antworten abgezogen!).

	Ja	Nein
Es gibt eine injektive Abbildung von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{N}$, die nicht surjektiv ist.		
S_8 enthält ein Element der Ordnung 15.		
$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist ein Körper mit vier Elementen.		
Jede abelsche Gruppe ist zyklisch.		
$(1, 2, 3)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$.		
Die Abbildung $f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$ ist eine lineare Abbildung zwischen den $\mathbb{Q}$-Vektorräumen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.		
Kerne von linearen Abbildungen sind immer Vektorräume.		
Eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist immer invertierbar, wenn alle Einträge a, b, c, d ungleich Null sind.		

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (3P) Es seien folgende Permutationen gegeben:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 6 & 1 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \pi := (1\,2\,4)(4\,2\,8)(3\,4\,6)(5\,9\,1)(1\,2\,3)(3\,4)$$

Schreiben Sie beide Permutationen in Zykelschreibweise mit disjunkten Trägern und bestimmen Sie das Signum und die Ordnung beider Permutationen.

ii.) (5P) Finden Sie in S_5 eine zyklische Untergruppe der Ordnung 6 und geben Sie alle Elemente in Zykelschreibweise mit disjunkten Trägern sowie deren Signum an.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Invertieren Sie die folgenden beiden Matrizen und notieren Sie beim Invertieren von A alle Matrizeneinträge mit den Zahlen $\{0, \dots, 4\}$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_5), \qquad B := \begin{pmatrix} 9 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{Q}).$$

ii.) (4P) Bestimmen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ die folgende Matrix invertierbar ist, und geben Sie dazu die Inverse an:

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & a \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Es sei folgende lineare Abbildung gegeben:

$$f\colon M(4\times 1,\mathbb{R}) \longrightarrow M(3\times 1,\mathbb{R}), \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_4 \\ x_1 - 4x_2 - 9x_3 \end{pmatrix}$$

i.) (4P) Lösen Sie das Gleichungssystem $\mathrm{Mat}(f)\cdot x = b$ mit $b := (1,2,3)^{\mathrm{tr}}$.

ii.) (4P) Geben Sie eine Basis von $\ker(f)$ und $\mathrm{im}(f)$ an.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Geben Sie alle Elemente der Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$ an. Diese ist entweder zu S_3 oder $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ isomorph. Geben Sie entweder einen Isomorphismus zu einer der Gruppen an oder ein Argument, warum sie zu einer der beiden Gruppen nicht isomorph sein kann.

Matrikelnummer: