Vorläufige Themenübersicht

1. HILBERTS Ansatz zum Entscheidungsproblem und der GÖDELsche Satz

Da HILBERTS Ansätze über viele Arbeiten verstreut sind und auch der GÖDELsche Beweis im Original nicht leicht lesbar ist, soll hier eine Übersicht genügen; der GÖDELsche Satz wird später noch mehrfach aus einfacher bewiesenen Sätzen folgen. Als Literatur bietet sich an:

WOLFGANG FRANZ: Über mathematische Aussagen, die samt ihrer Negation unbeweisbar sind – Der Unvollständigkeitssatz von Gödel, *Sitzungsberichte der wissenschaftlichen Gesellschaft an der Johann-Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, Band XIV, Nr. 1, Franz Steiner Verlag, Wiesbaden, 1977*

2. TURING-Maschinen und ihre Anwendung auf das Entscheidungsproblem

TURINGS Originalarbeit ist besser lesbar und für ein mathematisches Seminar besser geeignet als viele ihrer Darstellungen in heutigen Lehrbüchern, daher soll sie zugrunde gelegt werden:

ALAN TURING: On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. London Math. Soc. (2)* **42** (1937), 230–265, *und* **43** (1937), 544-546;
deutsche Übersetzung in ALAN TURING: *Intelligence Service,* Brinkmann & Bose, Berlin, 1987, 19–60

Dargestellt werden sollen vor allem die Ergebnisse aus den §§1, 5, 8 und 11; vom Rest der Arbeit nur das, was hierfür benötigt wird. Als Kuriosität am Rande kann man eventuell noch die Nummer einer universellen TURING-Maschine angeben; sie findet sich in

ROGER PENROSE: The emperor's new mind, *Oxford University Press, 1989* und *Penguin, 1991, Seite 56*

3-4. Das zehnte HILBERTsche Problem *(zwei Vorträge)*

Die negative Lösung des zehnten HILBERTschen Problems ergibt einen weiteren Beweis des GÖDELschen Unvollständigkeitssatzes und ein erstes unentscheidbares Problem aus der „üblichen" Mathematik: Es ist nicht möglich, für ein beliebig vorgegebenes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten zu entscheiden, ob es eine ganzzahlige Nullstelle hat.

J. P. JONES, Y. V. MATIJASEVIČ: Proof of recursive unsolvability of Hilbert's tenth problem, *Am. Math. Monthly* **98**, 8 (1991), 698–709

Aus der Einleitung soll dazu nur die Formulierung des zehnten HILBERTschen Problems und Satz 1 erwähnt werden; ansonsten behandelt der erste der beiden Vorträge die §§1-3, in denen es im wesentlichen um elementare Algebra (Teilbarkeit, Rechnen in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$) geht, der zweite Vortrag behandelt die Anwendung dieser Ergebnisse auf Berechenbarkeitsprobleme, wie sie in §§4-6 dargestellt ist. Vor allem im ersten Vortrag muß auf einige weniger interessante Rechnungen verzichtet werden.

5. Der Satz von RICHARDSON

Dieser Satz besagt, daß es nicht möglich ist, von zwei über Grundrechenarten, trigonometrische Funktionen und die Zahl π definierten Funktionen zu entscheiden, ob sie gleich sind; der Satz benutzt die negative Lösung des zehnten HILBERTschen Problems. (Tatsächlich war diese Lösung damals noch nicht bekannt, so daß RICHARDSON ein schwächeres Ergebnis benutzt, um ein schwächeres Resultat zu beweisen. Die Verschärfung auf die hier angegebene Aussage ist trivial.)

D. RICHARDSON: Some unsolvable problems involving elementary functions of a real variable, *J. Symb. Logic* **33** (1968), 511–520

6. Quantifizierung von Unentscheidbarkeit durch die algorithmische Informationstheorie

Die algorithmische Informationstheorie von SOLOMONOFF, KOLMOGOROFF und CHAITIN quantifiziert die Komplexität von Zahlen, Sätzen *usw.* durch die Länge des kürzesten Programms, daß die entsprechende Information produzieren kann. Wie etwa

LEONID A. LEVIN: Laws of information conservation (non-growth) and aspects of the foundations of probability theory, *Problems Inform. Transmission* **10**,3 (1974), 206–210

zeigt, ist die Komplexität eines aus einem Axiomensystem abgeleiteten Satzes beschränkt durch eine Funktion der Komplexität des Axiomensystems selbst, woraus er folgert, daß nicht nur *formale* Methoden, wie sie GÖDEL betrachtete, zu schwach sind, um über die Richtigkeit einer beliebig vorgegebenen Aussage zu entscheiden.

CHAITIN hat dies konkretisiert, indem er eine konkrete universelle TURING-Maschine programmierte, die zwecks besserer Benutzbarkeit in einem geeignet modifizierten LISP programmiert werden kann, und hierfür konkrete Schranken bewies. Der Vortragende sollte das CHAITINsche LISP ganz kurz vorstellen und dann anhand von CHAITINS Programmen für seine TURING-Maschine die entsprechende Aussage konkret beweisen. Falls Zeit bleibt, kann eventuell noch auf die Konstruktion einer nicht berechenbaren *Zahl* $\Omega \in \mathbb{R}$ eingegangen werden.

G.J. CHAITIN: The limits of mathematics – tutorial version, *preprint,* New York, 12. Sept. 1995

Da die Erläuterungen in dieser Arbeit sehr knapp sind, muß zum besseren Verständnis wahrscheinlich noch auf eine der drei (weitgehend identischen) älteren Versionen zurückgegriffen werden, die zwar ein weniger gut verständliches LISP haben, dafür aber mehr Erläuterungen bieten:

G.J. CHAITIN: The limits of mathematics, *preprint,* New York, 17. Juli 1994 *oder* 19. Juli 1994 *oder* 23. Juli 1994

7. TURING-Maschinen für $\mathbb{R}$ und die Lösbarkeit von reellen Gleichungen

Klassische TURING-Maschinen können nur mit ganzen Zahlen oder sonstigen Elementen eines *abzählbaren* Bereichs umgehen, so daß sie beispielsweise für Fragen der Analysis oder des numerischen Rechnens nicht geeignet sind. In diesem Vortrag sollen verallgemeinerte TURING-Maschinen vorgestellt werden, die über einem beliebigen (festen) Ring (wie etwa $\mathbb{R}$) arbeiten und es soll gezeigt werden, daß hier analoge Unentscheidbarkeitssätze gelten wie die von TURING.

L. BLUM, M. SHUB, S. SMALE: On a theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completeness, recursive functions and universal machines, *Bull. AMS* **21** (1989), 1–46

8. Dynamische Systeme und Fraktale

Dieser Vortrag soll den vorangegangenen fortsetzen und zeigen, daß viele Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, die im Zusammenhang mit dynamischen Systemen auftreten, nicht berechenbar sind. Bekanntestes Beipiels dafür ist der Rand der MANDELBROT-Menge, des „Apfelmännchens".

L. BLUM, S. SMALE: The Gödel incompleteness theorem and decidability over a ring, *in:* From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest, *Springer 1994, S.* 321–339

9. Die Sätze von RICE

Diese Sätze besagen, daß nicht nur das Halteproblem für TURING-Maschinen unentscheidbar ist, sondern auch beispielsweise das Problem, ob ihr Verhalten schließlich periodisch wird und genauso auch praktisch jede andere nichttriviale Eigenschaft des Langzeitverhaltens.

H.G. RICE: Classes of recursively enumerable sets and their decision problems, *Trans. AMS.* **89** (1953), 25–59

H.G. RICE: On completely recursively enumerable classes and their key arrays, *J. Symb. Logic* **21** (1956), 304–341

Alternativ kann man auch

JOHN E. HOPCROFT, JEFFREY D. ULLMAN: Introduction to automata theory, languages and computation, *Addison-Wesley, 1979, §8.4*

oder ein anderes geeignetes Lehrbuch der Berechenbarkeitstheorie oder der theoretischen Informatik benutzen.

10. TURING-Maschinen und Chaos bei Differentialgleichungen

Nach den Sätzen von RICE ist das Verhalten einer universellen TURING-Maschine in Abhängigkeit von ihrem Programm fast völlig unvorhersehbar. MOORE gab nun ein System von Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^3$ an, dessen Lösungen sich in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen genauso verhalten, wie die universelle TURING-Maschine in Abhängigkeit von ihrem Programm, es läßt sich also im allgemeinen nicht entscheiden, ob sich die Lösung einem Fixpunkt annähert oder periodisch wird oder was auch immer.

C. MOORE: Unpredictability and undecidability in dynamical systems, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990), 2354–2357

C. MOORE: Generalized shifts: Unpredictability and undecidability in dynamical systems, *Nonlinearity* **4**, 2 (1991), 199-230

11. Die Entscheidbarkeit der Prädikatenlogik erster Stufe

Nach den vielen Unentscheidbarkeitsresultaten in diesem Seminar soll wenigsten anhand zweier Beispiele gezeigt werden, daß es auch für nichttriviale Teilgebiete der Mathematik Entscheidungsalgorithmen geben kann. In diesem Vortrag soll der entsprechende Algorithmus für die Prädikatenlogik vorgestellt werden.

RAYMOND M. SMULLYAN: First-order logic, *Springer 1968, 1971; Dover 1995*

12. Der Satz von TARSKI und SEIDENBERG über die Entscheidbarkeit der Elementargeometrie

Auch die Elementargeometrie ist entscheidbar; ihre Probleme können beispielsweise zurückgeführt werden auf die Lösungstheorie algebraischer Gleichungssysteme. Der Vortragende sollte mindestens die Vorlesung *Algebra I* gehört haben.

W. SCHWABHAEUSER, W. SZMIELEW, A. TARSKI: Metamathematische Methoden in der Geometrie, *Springer Hochschultext, 1983*

RICCARDO BENEDETTI, JEAN-JACQUES RISLER: Real algebraic and semi-algebraic sets, *Hermann, Paris, 1990*

13. Die PENROSEschen Thesen über die Grenzen der künstlichen Intelligenz

Wie PENROSE in seinen Büchern

ROGER PENROSE: The emperor's new mind, *Oxford University Press, 1989* und *Penguin, 1991 und*

ROGER PENROSE: Shadows of the mind, *Oxford University Press, 1994*

argumentiert, folgt aus den Unentscheidbarkeitssätzen von GÖDEL, daß mathematisches Denken nicht von einer Maschine imitiert werden kann; die wesentlichen Argumente finden sich beispielsweise in Kapitel 3 des neueren Buchs. Die australische on-line Zeitschrift PSYCHE veröffentliche (größtenteils recht kritische) Rezensionen dieses Buchs von führenden Philosophen, Logikern und Vertretern der künstlichen Intelligenz; der Vortragende sollte kurz auf die wichtigsten Punkte der Rezensionen von FEFERMAN, MCCARTHY und MACDERMOTT eingehen; auf die anderen eventuell je nach seinem Geschmack.

14. Haben die GÖDELschen Sätze Konsequenzen für das Rechtssystem?

Man kann ein durch Gesetze gegebenes formalisiertes Rechtssystem mit einem mathematischen Axiomensystem vergleichen und sich daher fragen, ob die Argumente, die zu den GÖDELschen Sätzen führten, auch hier anwendbar sind und unentscheidbare Rechtsprobleme produzieren. Dies wird etwa diskutiert in

M.R. BROWN, A.C. GREENBERG: On formally undecidable propositions of law: Legal indeterminacy and the implications of metamathematics, *Hastings Law Journal* **43** (1992), 1439–1488