Modellierung von Wachstumsprozessen

von Wolfgang K. Seiler

In diesem Vortrag sollen einige Methoden und Probleme der mathematischen Modellierung im wesentlichen anhand eines einzigen Beispiels vorgestellt werden: Gesucht sind einfache mathematische Modelle für das Bevölkerungswachstum.

1. Problemstellung

Als erstes muß grundsätzlich diskutiert werden, was der Sinn eines Modells ist und welchen Kriterien es genügen sollte. Sodann werden Bevölkerungsdaten für Deutschland, USA und die gesamte Welt einen ersten Eindruck davon vermitteln, was man von einem einfachen Modell für das Bevölkerungswachstum erwarten kann und wo es notwendigerweise versagen muß.

1.1 Mathematische Modellierung

Aufgabe der mathematischen Modellierung ist es, zu einem bestehenden oder geplanten realen System ein mathematisches Modell zu finden, dessen Eigenschaften mit hinreichender Genauigkeit den jeweils interessierenden Eigenschaften des realen Systems entsprechen. Dazu müssen diese Eigenschaften in geeigneter Weise auf Zahlen oder sonstige mathematische Objekte abbildbar sein.

Die Natur des „Systems“ ist natürlich von außen, d.h. von außerhalb der Mathematik vorgegeben; es kann sich beispielsweise um ein physikalisches System handeln, dessen Entwicklung durch Naturgesetze eindeutig bestimmt ist, aber auch um ein biologisches, ökonomisches oder soziales

System, über dessen „Gesetze“ sich die verschiedenen Schulen von Fachgelehrten alles andere als einig sind – selbst wenn sie von der Existenz mathematisierbarer Gesetze ausgehen.

In der Tat gibt es keinen zwingenden Grund, warum sich *irgendein* System durch mathematische Gleichungen beschreiben lassen sollte; eher ist es ein Wunder, daß so viele Systeme zumindest näherungsweise mathematischen Gesetzen genügen. Der bekannte amerikanische Mathematiker, Physiker und Nobelpreisträger von 1963 EUGENE PAUL WIGNER (1902–1995) prägte in diesem Zusammenhang das Wort von der „unreasonable effectiveness of mathematics“.

Bei aller Effektivität der Mathematik darf man allerdings nie vergessen, daß mathematische Modelle – selbst wenn sie auf Naturgesetzen beruhen – im allgemeinen nur innerhalb bestimmter Grenzen gelten: So versagt beispielsweise die NEWTONsche Mechanik trotz all ihrer Erfolge sowohl im Bereich lichtnaher Geschwindigkeiten als auch im atomaren Bereich, und auch das OHMsche Gesetz gilt sicherlich nicht für einen $1\,\Omega$-Widerstand im Hochspannungslabor.

Welches Teilgebiet der Mathematik im Einzelfall das beste Modell liefert, ist schwer zu sagen; oft wird es für dasselbe Problem ganz verschiedene Ansätze geben, die trotzdem zu brauchbaren Ergebnissen führen – man denke etwa an den statistischen und den phänomenologischen Zugang zur Thermodynamik

Das wichtigste Grundprinzip, an das sich jede mathematische Modellierung halten sollte, formulierte bereits vor über 650 Jahren ein Nichtmathematiker, der englische Scholastiker und Franziskaner WILLIAM OF OCCAM (gelegentlich auch OCKHAM geschrieben; *ca.* 1285–*ca.* 1349):

> *What can be done with fewer [assumptions] is done in vain with more.*

Für die mathematische Modellierung bedeutet dieses heute meist als *Occam's razor* bezeichnete Prinzip, daß ein Modell vor allem möglichst einfach sein muß: Man kann zwar beispielsweise eine Zeitreihe aus 100 Bevölkerungsdaten mathematisch beschreiben, indem man ein Polynom vom Grad 99 oder mehr durch die Datenpunkte legt, aber das ist keine mathematische Modellierung, sondern sinnlose Rechnerei. Eine vernünftige Modellierung beginnt mit einfachen Annahmen, die von möglichst wenigen Parametern abhängen, versucht diese Parameter anhand der zur Verfügung stehenden Daten optimal zu bestimmen und vergleicht die Ergebnisse der Modellrechnung mit den Daten. Nur wenn die Anzahl der an die Daten angepaßten Parameter wesentlich geringer ist als die der Daten selbst, kann man im Erfolgsfall davon sprechen, daß ein Phänomen erklärt wurde und daß man vielleicht sogar künftige Entwicklungen voraussagen kann.

1.2 Dynamische Modellierung

In diesem Vortrag soll es nur um den Spezialfall der *dynamischen Modellierung* gehen. Diese möchte die zeitliche Entwicklung eines realen Systems anhand von dessen gegenwärtigem Zustand vorhersagen.

Die Grundannahme der dynamischen Modellierung ist folgende: Die Entwicklung des Systems soll nicht nur *irgendwie* mathematisch beschreibbar sein, sondern die gesamte Dynamik des Systems soll sich ableiten lassen aus dem gegenwärtigen Zustand sowie einem mathematischen Gesetz, das eine Aussage über das Verhalten des Systems *im nächsten Augenblick* auf der Grundlage des gegenwärtigen Zustands macht.

Mathematisch wird das Verhalten einer Größe „im nächsten Augenblick" beschrieben durch die Ableitung dieser Größe nach der Zeit; das mathematische Werkzeug der dynamischen Modellierung sind damit (gewöhnliche) Differentialgleichungen: Das System wird modelliert durch gewisse Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei die Funktionswerte $f_i(t)$ den Zustand zum Zeitpunkt t beschreiben. Das der dynamischen Modellierung zugrundeliegende Gesetz ist dann gegeben durch eine Differentialgleichung, die $f_i'(t)$ durch die verschiedenen $f_j(t)$ und gegebenenfalls auch t selbst ausdrückt.

1.3 Wachstumsprozesse

Mit die einfachsten Beispiele zur dynamischen Modellierung sind *Wachstumsprozesse:* Hier geht es um nur *eine* zeitabhängige Größe $f(t)$, zum Beispiel die Stärke einer Population zum Zeitpunkt t oder die Masse oder die Konzentration eines Stoffs oder ...

Für die Modellierung werden zwei Dinge als bekannt vorausgesetzt:

- Der Wert von f zu einem (oder mehreren) Zeitpunkten
- Ein *lokales* Wachstumsgesetz, das die Wachstumsrate von f zum Zeitpunkt t, d.h. die Ableitung $f'(t)$, ausdrückt durch den Wert $f(t)$ und eventuell auch noch t selbst.

Falls die Wachstumsrate nur vom Wert $f(t)$ abhängt, spricht man von einem *autonomen* Wachstumsprozeß. In den Naturwissenschaften und der Technik sind Wachstumsprozesse meist von dieser Art; in der Finanzwelt, wo Zinssätze stark von der Zeit abhängen können, gibt es auch viele Beispiele nichtautonomer Wachstumsprozesse.

Auch das Bevölkerungswachstum, um das es hier in erster Linie gehen soll, ist ein nichtautonomer Prozeß, da geschichtliche Ereignisse und politische Entscheidungen sicherlich ihre Auswirkungen auf die Bevölkerungsentwicklung haben. Da es aber definitiv zu weit führen würde, noch mathematisches Modelle von Geschichte und Politik zu entwickeln, möchte ich in diesem Vortrag von einem autonomen Bevölkerungswachstum ausgehen und umgekehrt versuchen, die dann mehr oder weniger zwangsläufigen Diskrepanzen zwischen Modell und Wirklichkeit durch geschichtliche Ereignisse zu erklären.

Für eine realistische Schätzung der künftigen Bevölkerungsentwicklung kann man natürlich nicht so vorgehen; hier muß der Einfluß politischer Entscheidungen berücksichtigt werden. Da allerdings weder diese Entscheidungen noch ihre Auswirkungen im voraus bekannt sind, kommen auf diese Weise zahlreiche willkürliche Festlegungen ins Modell, so daß man mit etwas bösem Willen fast jede gewünschte Zukunft vorhersagen kann – vom Aussterben der Deutschen bis zur Sicherheit der Renten bis zum Ende des dritten Jahrtausends. Seriöse Schätzungen, wie etwa die Weltbevölkerungsschätzungen der Vereinten Nationen, betrachten mehrere Varianten der politischen Entwicklung und geben dementsprechend auch mehrere Szenarien der künftigen Entwicklung an; siehe dazu §1.5*c).*

1.4 Lineares Wachstum

Als einfachstes (und langweiligstes) Beispiel eines Wachstumsprozesses sei hier ganz kurz das *lineare Wachstum* betrachtet:

Grundannahme des Modells ist eine sowohl von der Zeit t als auch vom Zustand $f(t)$ des Systems unabhängige Änderungsrate. Dies führt auf die Differentialgleichung

$$f'(t) = \lambda \quad \text{mit} \quad f(t_0) = x_0 \ ;$$

die wohlbekannte Lösung

$$f(t) = x_0 + \lambda(t - t_0) \ ,$$

überlegt man sich üblicherweise schneller und einfacher ohne den Umweg über eine Differentialgleichungen.

Beispiele für lineares Wachstum sind wohlbekannt: Der Inhalt eines Wasserbeckens, das durch konstanten Zufluß gespeist wird, die Geschwindigkeit eines Massenpunkt, der einer konstanten (nichtrelativistischen) Kraft ausgesetzt ist, *usw.*

Auch die Grenzen des Modells sind leicht erkennbar: Kein Wasserbecken kann unbegrenzt Wasser aufnehmen, und keine Geschwindigkeit kann unbegrenzt steigen, bevor die spezielle Relativitätstheorie das lineare Wachstum durch ein langsameres ersetzt.

1.5 Bevölkerungswachstum

Da jede Modellierung von einem nichtmathematischen Problem ausgeht, möchte ich hier beispielhaft *ein* solches Problem betrachten: das Bevölkerungswachstums. Über die künftige Entwicklung der Bevölkerung von Deutschland, sonstiger Weltregionen oder auch der gesamten Welt gibt es viele Spekulationen und Vorhersagen; wir wollen hier einige der einfachsten betrachten.

Für diese Beispiele gibt es keine allgemein anerkannten mathematischen Gesetze, und je nach Modell kommen die verschiedenen Experten zu jeweils völlig anderen Voraussagen; das Bevölkerungswachstum verdeutlicht also auch die Schwierigkeiten der dynamischen Modellierung.

Die Entscheidung für eine *dynamische* Modellierung anstelle etwa einer Modellierung durch einen diskreten stochastischen Prozeß bringt bereits eine erste Ungenauigkeit ins Modell, da die dynamische Modellierung von kontinuierlichen Variablen ausgehen muß, wohingegen Bevölkerungszahlen ihrer Natur nach ganzzahlig und damit diskret sind. Dieser Fehler ist bei einer Bevölkerung, die aus nur wenigen Individuen besteht sicherlich bedeutsam; bei den hier betrachteten Beispielen jedoch werden nie Bevölkerungsstärken von unter zehn Millionen auftreten, und da können wir den Unterschied zur nächsten ganzen Zahl gegenüber den sonstigen Fehlerquellen getrost vernachlässigen.

a) **Die deutsche Bevölkerung:** Hier stellt sich als erstes die Frage, was man unter „Deutschland" verstehen will; sowohl in diesem als auch im letzten Jahrhundert gab es dazu eine ganze Reihe einander widersprechender Vorstellungen.

Aus praktischen Gründen empfiehlt sich, nur das Gebiet der *alten* Bundesrepublik vor dem Beitritt der neuen Bundesländer zu betrachten. Für dieses Gebiet berechnete das statistische Bundesamt auch aus alten Bevölkerungsstatistiken aus dem neunzehnten und der ersten Hälfte des zwanzigsten Jahrhundert die jeweiligen Bevölkerungszahlen, und es führt dieses Gebiet auch heute noch getrennt auf.

Im statistischen Jahrbuch 1996 sind die entsprechende Bevölkerungszahlen für den Zeitraum von 1816 bis 1994 ausgewiesen, und auf dem WWW-Server des statistischen Bundesamts ist auch bereits eine Zahl für 1995 zu finden – eine derart umfangreiche Zeitreihe ist für kein anderes deutsches Gebiet so leicht verfügbar.

Die folgende Tabelle zeigt eine Auswahl der zur Verfügung stehenden Zahlen; die Einwohner sind dabei, wie auch in den folgenden Tabellen, jeweils in Einheiten von einer Million angegeben. Die Originaldaten sind im statistischen Jahrbuch auf Tausender genau zu finden; hier sind sie der Übersichtlichkeit halber auf volle Hunderttausender gerundet, was wohl immer noch weit über ihrer tatsächlichen Genauigkeit liegen dürfte. Der gesamte Datensatz mit der vom Statistischen Bundesamt angegebenen Genauigkeit ist im MAPLE *worksheet* zu diesem Vortrag zu finden, das via `ftp` von hilbert.math.uni-mannheim.de im Verzeichnis `MatMod` geholt werden kann. Die graphischen Darstellungen und die Beispielrechnungen in diesem Vortrag beziehen sich auf diesen vollständigen Datensatz.

Bevölkerungsentwicklung für das Gebiet der alten Bundesrepublik

Jahr:	1816	1822	1831	1840	1849	1858	1864
Bevölkerung:	13,7	14,6	15,6	17,0	18,0	18,6	19,6
Jahr:	1871	1880	1890	1900	1910	1925	1930
Bevölkerung:	20,4	22,8	25,4	29,9	35,6	39,0	40,3
Jahr:	1935	1939	1946	1950	1955	1960	1965
Bevölkerung:	41,5	43,0	46,2	50,0	52,4	55,4	59,3
Jahr:	1970	1974	1978	1980	1985	1990	1995
Bevölkerung:	60,7	62,1	61,4	61,5	61,0	63,3	67,6

Quelle: bis 1994: StBA, Statistisches Jahrbuch 1996, Seite 47
1995: http://www.statistik-bund.de/basis/d/bd02_t03.htm

1816–1910 Werte im Dezember, 1925, 1933 und 1961 im Juni, 1926–1932 und 1934–1938 Jahresmitte, 1939, 1970 und 1987 im Mai, 1946 im Oktober, 1947–1960, 1962–1969, 1971–1986 und 1988-1994 Jahresdurchschnitt, 1995 am 31. Dezember

Aufgabe der dynamischen Modellierung ist es, wie gesagt, diese Daten durch eine mathematische Funktion anzunähern.

Für einen ersten Überblick empfiehlt es sich, die Daten zunächst graphisch darzustellen; das Ergebnis in Abbildung 1 versetzt einer jeden Hoffnungen auf allzu genaue Approximation einen deutlichen Dämpfer: Die dargestellte Kurve kann zwar zu mancher Diskussion im Geschichtsunterricht verführen, aber durch einen einfachen Ansatz der dynamischen Modellierung läßt sie sich sicherlich nicht beschreiben.

In der Tat ist hier die Grundannahme der dynamischen Modellierung garzu deutlich verletzt: Die Gestalt der Kurve ist bestimmt durch Ereignisse wie Kriege, Nachkriegszeiten, Wirtschaftskrisen und -aufschwung, Wanderungsbewegungen nach der Öffnung des eisernen Vorhangs *usw.*, und keines

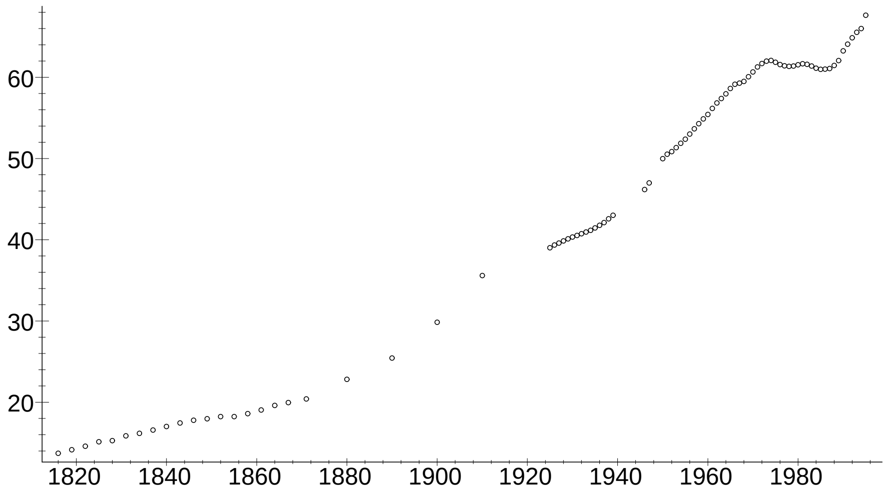


Abb. 1: Bevölkerungsentwicklung in der alten Bundesrepublik, 1816–1995

dieser Ereignisse ist eingetreten, weil die Bevölkerungszahl auf dem Gebiet der alten Bundesrepublik einen bestimmten Wert erreichte – eine dynamische Modellierung, die nur von Bevölkerungszahlen ausgeht, kann also nur zu einem Modell führen, das einen von all diesen Einflüssen unabhängigen Trend beschreibt. Wir werden sehen, inwieweit dies möglich ist.

b) **Die amerikanische Bevölkerung:** Die Vereinigten Staaten von Amerika führen seit 1790 in jedem zehnten Jahr einen „Census“ durch, in dessen Rahmen insbesondere auch die Gesamteinwohnerzahl festgestellt wird; sie bieten daher ein ideales Beispiel, für einen über einen langen Zeitraum hinweg dokumentierten Wachtumsprozess. Zwar hat sich das Territorium der USA seit 1790 gewaltig vergrößert, aber da Staaten wie das 1867 für $7 200 000 dazugekaufte Alaska kaum Einwohner haben, ist der Effekt dieser Änderungen auf die Bevölkerungszahlen fast vernachlässigbar – besonders wenn man bedenkt, daß Volkszählungsdaten notorisch unzuverlässig sind. Wir betrachten daher die Daten, wie sie bei der jeweiligen Volkszählung für das damals aktuelle Territorium der Vereinigten Staaten ermittelt wurden.

Das U.S. Department of Commerce, Bureau of the Census, veröffentlicht diese Daten ohne jegliche Rundung; in der folgenden Tabelle sind sie zur besseren Übersicht wieder auf volle Hunderttausender gerundet und in Einheiten von einer Million Einwohner dargestellt. Das MAPLE *worksheet* am Ende des Vortrags enthält die exakten Daten.

Hier zeigt die graphische Darstellung in Abbildung 2 ein erheblich glatteres Bild; man kann zwar erkennen, daß um 1940 herum etwas passiert sein muß, aber die ganzen Einwanderungswellen und territorialen Vergrößerungen führen zu keinerlei visuell erkennbaren Sprungstellen der Funktion oder

Bevölkerungsentwicklung in den USA 1790–1990

Jahr:	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850
Bevölkerung:	3,9	5,3	7,2	9,6	12,9	17,1	23,1
Jahr:	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920
Bevölkerung:	31,4	39,8	50,2	62,9	76,0	92,0	105,7
Jahr:	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
Bevölkerung:	122,8	131,7	151,3	179,3	203,3	226,5	248,7

Quelle: Statistical Abstracts of the United States, 113th edition, 1993;
hier zitiert nach **[YSH]**, Seite 93

ihrer Ableitung – die Modellierung hier sollte also einfacher und genauer möglich sein.

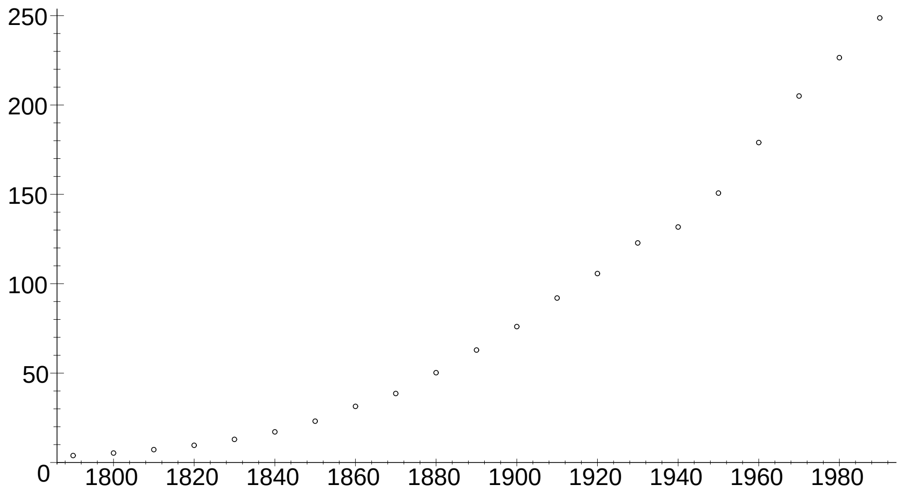


Abb. 2: U.S. Population Census, 1790–1990

c) **Weltbevölkerung:** Wenn wir die Bevölkerung der gesamten Erde betrachten, gibt es natürlich keinerlei Probleme mit der geographischen Abgrenzung des Gebiets – aber damit ist auch schon alles positive über die Möglichkeit der Datenerhebung gesagt.

Bestenfalls beruhen Bevölkerungszahlen auf Erhebungen der verschiedenen Staaten, die natürlich alle zu verschiedenen Zeitpunkten und nach verschiedenen Methoden durchgeführt wurden; auch im neuesten *Demographic Yearbook* der Vereinten Nationen steht noch der Hinweis

> *Unless otherwise specified all figures are estimates of the order of magnitude and are subject to a substantial margin of error; ...*

Früher wurde der Fehler eine Zeitlang mit etwa $\pm 5\%$ angegeben; inzwischen fehlen solche konkrete Angaben. Bei den älteren Daten waren Berichte von Reisenden oft die einzige Datenquelle; Volkszählungen gab es in einigen Staaten erstmalig in den achtziger Jahren unseres Jahrhunderts! Bis in die erste Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts hinein gibt es daher nur zum Teil weit auseinanderliegende Schätzungen verschiedener Autoren; für einen kommentierten Überblick sei auf [**W**], §A2.1, S. 37–56 und auf [**D**] verwiesen; eine unkommentierte Zusammenstellung, die bis zum Jahr 10 000 zurückreicht, stellt das amerikanische *Bureau of the Census* unter http://www.census.gov/ipc/www/worldhis.html zur Verfügung. Die unten abgedruckte Tabelle enthält Schätzungen der Vereinten Nationen:

Entwicklung der Weltbevölkerung 0–1995

Jahr:	0	1000	1250	1500	1750	1800	1850
Bevölkerung:	300	301	400	500	790	980	1260
Jahr:	1900	1920	1930	1940	1950	1960	1970
Bevölkerung:	1650	1860	2070	2300	2520	3021	3697
Jahr:	1975	1980	1985	1990	1995		
Bevölkerung:	4077	4444	4846	5285	5702		

Quelle: United Nations Populations Division, New York
bis 1950: World population growth from year 0 to stabilization, mimeo, New York, 1995
oder gopher://gopher.undp.org/00/ungophers/popin/wdtrends/histor
1950–1994 Demographic Yearbook 1994, New York 1996
1995 Population Reference Bureau: 1995 World population data sheet; auch erhältlich
über http://dbdev.ciesin.org:8989/cgi-bin/wdb/wdbprb/fdf/PRBWDS/form

Um einen Überblick über die Genauigkeit der Daten zu geben, sei in der nächsten Tabelle für einige Zeitpunkte die Spannweite der verschiedenen Schätzungen aufgeführt, die in [**D**] und [**W**] zusammengestell sind:

Jahr:	0	1000	1500	1650
Bevölkerung:	270–330	275–345	440–540	465–545
Jahr:	1750	1800	1850	1900
Bevölkerung:	726–805	836–906	1098–1325	1551–1710

Diese unteren und oberen Schranken sind in Abbildung 3 zusätzlich als kleine Quadrate und Rauten eingezeichnet.

Auch für die künftige Bevölkerungsentwicklung gibt es Schätzungen; diese hängen aber stark von der künftigen politischen Entwicklung ab und werden daher in mehreren Varianten angegeben, die jeweils alle zwei Jahre aktualisiert werden. Die letzte Aktualisierung vom November 1996 geht für das Jahr 2025 bei der niedrigen Variante aus von 7,474 Milliarden Menschen, bei der mittleren von 8,039 Milliarden und bei der hohen von 8,581

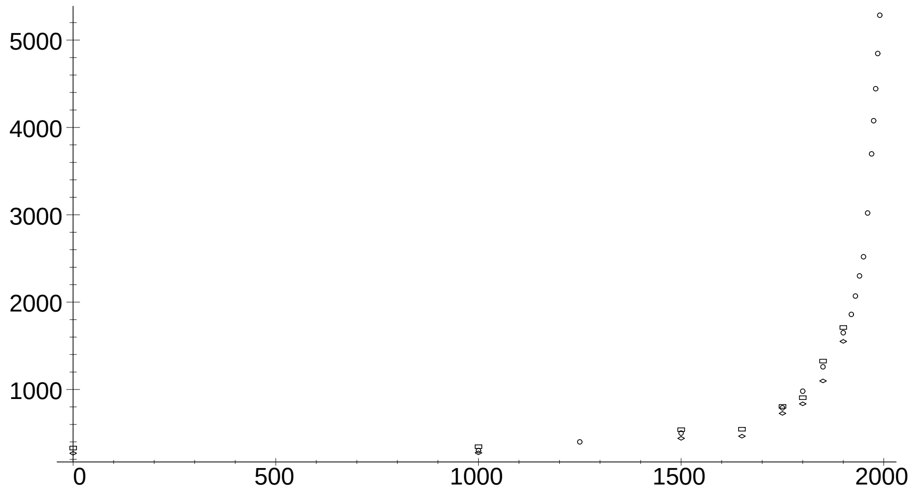


Abb. 3: Entwicklung der Weltbevölkerung, 0–1995

Milliarden. Die entsprechenden Zahlen für 2050 sind 7,662 Milliarden, 9,367 Milliarden und 11,156 Milliarden.

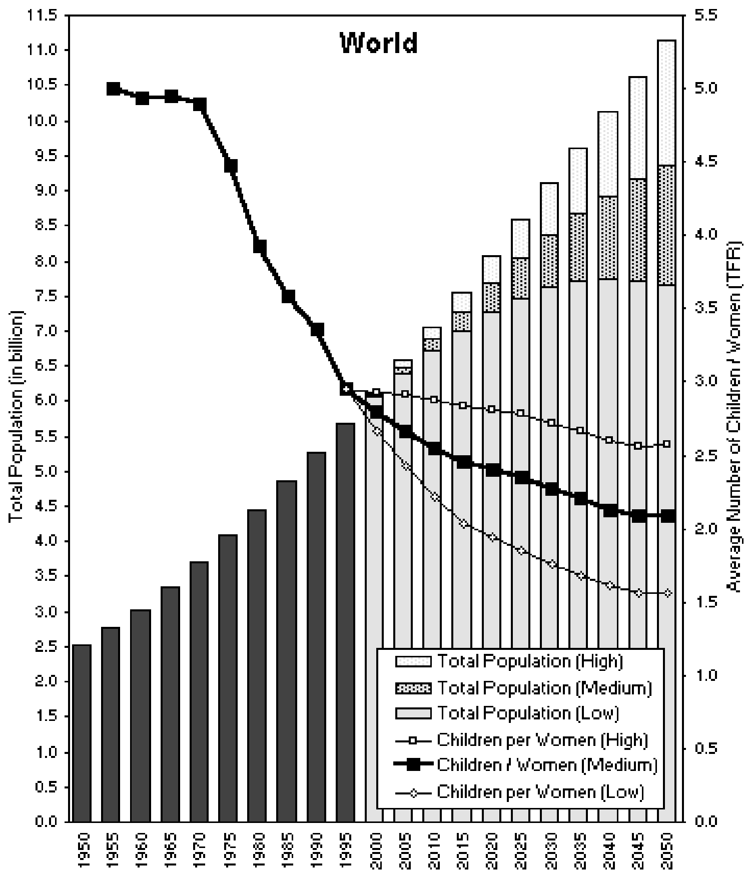


Abb. 4: Szenarien zur Entwicklung der Weltbevölkerung, 1950–2050

In Abbildung 4 sind die drei Szenarien und die ihnen zugrundeliegenden Entwicklungen der Kinderzahl pro Frau aufgezeichnet (nach [**Hei**]); wie man sieht führen zumindest die niedrige und die mittlere Variante zu einer Stabilisierung der Weltbevölkerung im nächsten Jahrhundert.

2. Der Ansatz von Malthus: Exponentielles Wachstum

Wie das lineare Wachstum ist auch das exponentielle Wachstum zumindest im Prinzip wohlbekannt – auch wenn wohl nicht jeder, der vollmundig von den Gefahren eines exponentiellen Wachstums redet, wirklich weiß, was eine Exponentialfunktion ist.

2.1 Die Modellannahmen

Thomas Robert Malthus (1766–1834) war protestantischer Geistlicher und Nationalökonom. Er veröffentlichte sein Buch *Das Bevölkerungsgesetz* 1798 zunächst anonym, in überarbeiteter Fassung dann unter eigenem Namen in sechs zwischen 1803 und 1826 erschienenen Auflagen als Streitschrift gegen die Sozialisten: Diese machten die Regierung verantwortlich für die Verelendung weiter Bevölkerungsteile während der industriellen Revolution im 18. Jahrhundert und forderten eine Neuordnung der Gesellschaft.

Für Malthus dagegen war diese Verelendung *zwangsläufig* und unabhängig von jeder menschlicher Einflußmöglichkeit. Sein als gottgewollt angesehenes Bevölkerungsgesetz sollte als Naturgesetz für alle Völker und alle Zeiten gültig sein; es beruht auf folgenden zwei Postulaten:

> *Erstens: Die Nahrung ist für die Existenz des Menschen notwendig. Zweitens: Die Leidenschaft zwischen den Geschlechtern ist notwendig und wird etwa in ihrem gegenwärtigen Zustand bleiben ... Die Bevölkerung wächst, wenn keine Hemmnisse auftreten in geometrischer Reihe an (wie 2, 4, 8). Die Unterhaltsmittel nehmen nur in arithmetischer Reihe zu (wie 1, 2, 3 usw.).*

Auch wenn der an gottgewollte Bevölkerungsgesetze glaubende Malthus sicherlich nicht viel mit dem gegen den aristotelischen Realismus à la Thomas von Aquin kämpfenden Empirizisten Occam gemeinsam hatte, sind seine Prinzipien unbestreitbar mit *Occam's razor* vereinbar: Das Modell ist einfach, und eine geometrische Reihe (besser: Folge) hat die Form $x_n = aq^n$, hängt also nur von zwei Parametern ab.

MALTHUS spezifizierte sogar einen der beiden Parameter seines Modells: Natürlich und gottgewollt sind vier Kinder pro Ehe, was zu einer Verdoppelung der Bevölkerung alle 25 Jahre führt – letztere Zahl immerhin begründete er empirisch mit der Bevölkerungsentwicklung der letzten 25 Jahre in den amerikanischen Kolonien, und er gab später auch zu, daß diese Datenbasis nicht sonderlich überzeugend sei.

Ein Anwachsen in geometrischer Reihe ist äquivalent mit einer konstanten *relativen* Wachstumsrate, die absolute Veränderung ist also jeweils proportional zum Bestand. In Formeln ausgedrückt führt dies auf die Differentialgleichung

$$f'(t) = \lambda f(t) \quad \text{mit} \quad f(t_0) = x_0 \,,$$

wobei λ die Differenz zwischen Geburtenrate und Sterberate der Population ist.

2.2 Lösung der Differentialgleichung

Die Lösung obiger Gleichung ist ohne Rückgriff auf die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen mit Schulmathematik möglich – zumindest solange wir davon ausgehen können, daß $f(t)$ stets positiv ist und daß Vertrautheit mit Integration, Exponentialfunktion und Logarithmus zur Schulmathematik gehört. Ersteres bereitet sicherlich keine Probleme, denn negative Bevölkerungszahlen sind sinnlos, und wenn eine Bevölkerung erst einmal ausgestorben ist, muß man die Simulation ohnehin beenden. Letzteres dagegen ist zumindest bei Schülern, die später ein Studium an der Universität Mannheim aufnehmen, häufig nicht der Fall. Ich werde daher im nächsten Abschnitt einen alternativen Zugang vorstellen, bei dem die Exponentialfunktion aus dem Modellierungszusammenhang heraus definiert wird, ohne daß Integrale auftreten.

Beginnen wir aber zunächst mit der direkten Integration der Differentialgleichung: Da

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{dt} \ln f(t)$$

ist, läßt diese sich auch in der Form

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{dt} \ln f(t) = \lambda$$

schreiben; Integration beider Seiten führt auf

$$\ln f(t) = \lambda t + C \,,$$

und die Anwendung der Exponentialfunktion auf beide Seiten macht daraus

$$f(t) = e^{\lambda t} \cdot e^C$$

mit $f(t_0) = e^{\lambda t_0} \cdot e^C$, d.h.

$$e^C = x_0 e^{-\lambda t_0}$$

und schließlich

$$f(t) = x_0 e^{\lambda(t-t_0)} .$$

2.3 Definition der Exponentialfunktion über das Malthussche Wachstum

Die Exponentialfunktion wird in der Schule – wenn überhaupt – meist eingeführt über den Grenzwert

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n ,$$

eine trotz aller Zinseszinsen nicht gerade leicht motivierbare Definition.

Stattdessen könnte man auch ausgehen von einem Modellierungsproblem und eine Funktion $\exp(x)$ *definieren* als Lösung der Differentialgleichung

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \text{und} \quad \exp(0) = 1 .$$

Da man in Rahmen der Schulmathematik weder Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Differentialgleichungen noch Analytizitätssätze beweisen kann, ist hier allerdings eine Entscheidung notwendig:

- Entweder ist man bereit zu glauben, daß jede Differentialgleichung der Form

  $$y' = \lambda y \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0$$

  höchstens eine Lösung hat, was anschaulich anhand des Vektorfelds zwar klar erscheint, aber leicht zu beweisen ist nur, daß für die Differenz zwischen zwei Lösungen an der Stelle x_0 alle Ableitungen verschwinden, und daraus folgt noch lange nicht, daß diese Differenz auch in einer Umgebung von x_0 verschwinden muß: Man denke nur an die Funktion $y = e^{-1/x^2}$, deren sämtliche Ableitungen an der Stelle Null verschwinden.
- Oder man beschränkt sich auf *analytische* Funktionen, d.h. Funktionen, die durch ihre TAYLOR-Reihe dargestellt werden. Dann führt ein

Potenzreihenansatz für die Differentialgleichung $y' = \lambda y$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 1$ sofort auf die Reihe

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!} \,,$$

womit die Eindeutigkeit der Lösung (unter den analytischen Funktionen) klar ist. Zum Nachweis der Existenz einer Lösung muß *(sollte?)* man beweisen, daß die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Unter jeder der beiden Voraussetzungen ist daher $\exp(x)$ zunächst einmal wohldefiniert. Außerdem ist für jede Konstante ξ nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} \exp(x + \xi) = \exp(x + \xi) \,,$$

$\exp(x + \xi)$ erfüllt also die Differentialgleichung

$$y' = y \quad \text{mit} \quad y(0) = \exp(\xi) \,.$$

Eine weitere Lösung desselben Anfangswertproblems ist

$$y = \exp(\xi) \cdot \exp(x) \,,$$

also ist

$$\exp(x + \xi) = \exp(x) \cdot \exp(\xi) \quad \text{für alle } x, \xi \,.$$

Insbesondere folgt, daß

$$\exp(nx) = \exp(x)^n \quad \text{für alle } x, n \,.$$

Anhand der beiden Spezialfälle

$$\exp(n) = \exp(1)^n \quad \text{und} \quad \exp(1) = exp(1)^p = \exp(q \cdot \tfrac{p}{q}) = \exp(\tfrac{p}{q})^q$$

sieht man weiter, daß für jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$

$$\exp(\tfrac{p}{q}) = \exp(1)^{\frac{p}{q}}$$

gilt; aufgrund der Stetigkeit von exp ist $\exp(x)$ daher für jede reelle Zahl x gleich $\exp(1)^x$.

Die Zahl $e = \exp(1)$ läßt sich auf mindestens zwei Arten berechnen:

- Aufgrund der Differentialgleichung $y' = y$ mit $y(0) = 1$ ist $y^{(n)}(0) = 1$ für alle n, also ist nach Taylor
$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,.$$
- Alternativ kann man das Intervall von 0 bis 1 in n Teilintervalle der Länge $\frac{1}{n}$ unterteilen und die Differentialgleichung durch die Differenzengleichung
$$\frac{\exp(x+\frac{1}{n}) - \exp(x)}{\frac{1}{n}} \approx \exp'(x) = \exp(x)$$
oder
$$\exp(x+\tfrac{1}{n}) \approx \exp(x)\cdot\bigl(1+\tfrac{1}{n}\bigr)$$
approximieren, was auf
$$\begin{aligned}\exp(1) &\approx \exp(1-\tfrac{1}{n})\cdot\bigl(1+\tfrac{1}{n}\bigr) \approx \exp(1-\tfrac{2}{n})\cdot\bigl(1+\tfrac{1}{n}\bigr)^2 \approx \cdots\\ &\approx \exp(0)\cdot\bigl(1+\tfrac{1}{n}\bigr)^n = \bigl(1+\tfrac{1}{n}\bigr)^n\end{aligned}$$
und damit im Limes auf
$$\exp(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
führt.

2.4 Wie erkennt man exponentielles Wachstum?

Es gibt in der Natur Prozesse wie etwa das Abklingen einer elektromagnetischen Schwingung oder den radioaktiven Zerfall, die aufgrund von Naturgesetzen ein exponentielles (hier negatives) Wachstum aufweisen; für das Bevölkerungswachstum, gibt es aber – was immer Malthus auch geglaubt haben mag – offensichtlich kein entsprechendes Gesetz. Hinzu kommt, daß wir mit unpräzisen Daten arbeiten müssen, die selbst im Fall eines exakt exponentiellen Wachstums der realen Bevölkerung nicht auf einer Exponentialkurve lägen.

Wir brauchen daher Verfahren, die

- entscheiden können, ob die gegebenen Daten *ungefähr* einem exponentiellen Wachstumsgesetz genügen *und* die
- gegebenenfalls auch die Parameter dieses Gesetzes zu bestimmen gestatten.

a) **Logarithmische Skalierung:** Ist $f(t) = y_0 e^{\lambda(t-t_0)}$, so ist

$$\log f(t) = \log y_0 + \lambda(t - t_0)\,,$$

der Logarithmus von $f(t)$ hängt also linear von t ab.

Diese Linearität läßt sich für gegebene empirische Daten gut überprüfen, indem man die gegebenen Daten auf (halb)logarithmischem Papier zeichnerisch darstellt; in Abbildung 5 ist dies für die Staatsverschuldung der Bundesrepublik in den Jahren 1950–1986 beispielhaft vorgeführt. (Da sich Staatschulden nicht in offensichtlicher Weise einem Teilgebiet zuordnen lassen, ist es hier nicht sinnvoll, auch aktuellere Daten zu betrachten.)

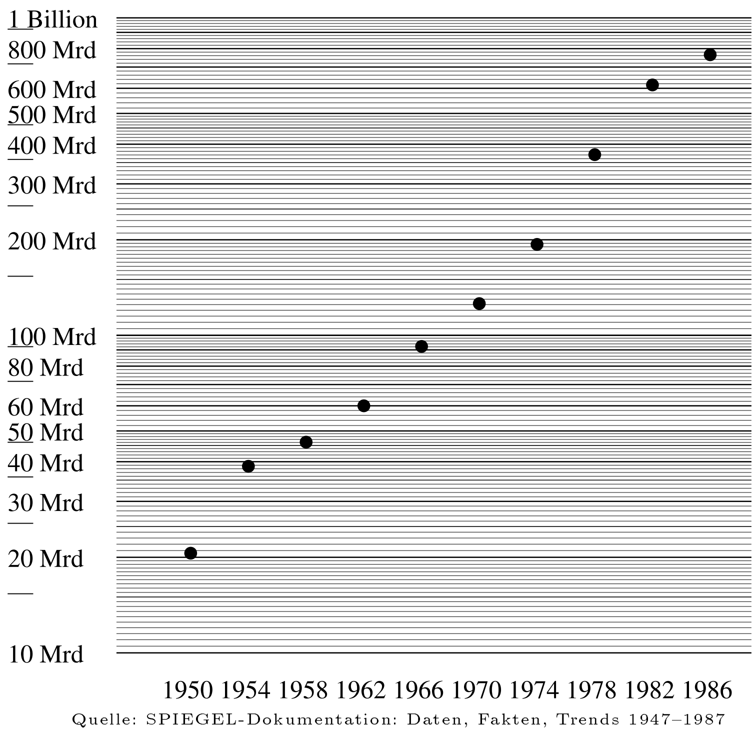


Abb. 5: Staatsverschuldung der Bundesrepublik 1950–1986

Umständlicher, dafür aber billiger ist es, die Punkte $\big(t, \log f(t)\big)$ in ein gewöhnliches kartesisches Koordinatensystem einzutragen, und am einfachsten geht es, wenn man die Daten von einem Computeralgebrasystem logarithmisch darstellen läßt, etwa mit dem Kommando `logplot` von MAPLE. Letztere Möglichkeit habe ich daher für alle weiteren Beispiele dieses Vortrags gewählt.

Falls man eher an quantitativer als an visueller Information interessiert ist, kann man – so man mit den Grundzügen der linearen Refression vertraut ist – auch den Korrelationskoeffizienten zwischen t und $f(t)$ berechnen; falls dieser eher bei Null als bei ± 1 liegt, handelt es sich offensichtlich nicht um ein exponentielles Wachstumsgesetz. Die Umkehrung gilt allerdings leider nicht: Auch ein lineares oder sonstwie monotones Wachstum führt oft auf sehr nahe bei ± 1 liegende Korrelationskoeffizienten zwischen t und $f(t)$.

Es gibt zwar auch einen speziellen statistischen Test auf linearen Zusammenhang zwischen Zufallsvariablen, den auf der F-Verteilung basierenden FISHERschen Linearitätstest, aber dieser setzt voraus, daß für mindestens einen Zeitpunkt t mehr als ein Schätzwert für $f(t)$ zur Verfügung steht; das ist bei den uns interessierenden Problemen im allgemeinen nicht der Fall. Die beste Kontrolle auf Linearität ist also wohl in der Tat die visuelle, eventuell verbunden mit der Berechnung von quadratischen Abweichungen hierfür sowie für einige ebenfalls plausibel erscheinende Alternativen.

Anders sieht es aus bei der Schätzung der Parameter des linearen Zusammenhangs: Falls die Störungen der Linearität sehr klein sind, läßt sich zwar sehr einfach eine Gerade durch die Datenpunkte legen, in komplizierteren Fällen wie bei der sehr schwer und damit nur mit großen Fehlern zu schätzenden Weltbevölkerung hat eine mögliche Ausgleichsgerade aber optisch so viel „Spielraum“, so daß sich die Parameter nur mit sehr geringer Genauigkeit schätzen lassen und hier rechnerische Verfahren zu besseren Ergebnissen führen.

Am einfachsten wählt man zwei „gut aussehende“ Punkte und berechnet die dadurch bestimmte Gerade. Mathematisch besser (wenn auch beileibe nicht optimal) ist es, nach der *Methode der kleinsten Quadrate* die Ausgleichsgerade für *alle* Datenpunkte (eventuell abgesehen von offensichtlichen Ausreißern) zu legen. Auch wenn man die dazu notwendige mathematische Theorie nicht entwickeln möchte (falls doch, siehe §6), kann man sich diese Gerade leicht verschaffen, da viele technisch-wissenschaftliche Taschenrechner unter dem Stichwort *zweidimensionale Statistik* insbesondere auch die lineare Regression zur Verfügung stellen und somit die Koeffizienten der Ausgleichsgeraden automatisch berechnen können. Computeralgebrasysteme bieten diese Möglichkeit natürlich auch; die Ausgleichsgeraden zu den Beispielen dieses Vortrags sind mit dem Kommando `fit[leastsquare]` von MAPLE berechnet.

***b)* Berechnung der relativen Wachstumsraten:** Da das exponentielles Wachstum durch seine konstante Wachstumsrate definiert ist, liegt es nahe, diese Wachstumsrate $f'(t)/f(t)$ anhand der Daten zu berechnen und auf Konstanz zu überprüfen.

Das Problem dabei ist allerdings, daß wir die tatsächlichen Wachstumsraten der Funktion, d.h. den Wert der Ableitung an einer gegebenen Stelle, nicht kennen; wir müssen ihn annähern durch beispielsweise einen Differenzenquotienten: Falls wir Bevölkerungszahlen $y_i = f(t_i)$ für die Zeitpunkte

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$$

kennen, ist

$$f'(t_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i}$$

für $i < n$ eine mögliche Approximation. Falls wir allerdings davon ausgehen müssen, daß die Daten y_i mit zufälligen Fehlern behaftet sind, werden diese Fehler in etwa der Hälfte der Fälle für y_i und y_{i+1} das gleiche Vorzeichen haben, so daß sie sich im Differenzenquotienten teilweise wegheben, während sie sich in den restlichen Fällen durch Addition der Beträge verstärken. Man muß also davon ausgehen, daß die so berechneten Daten gegenüber den y_i erheblich rauher sind.

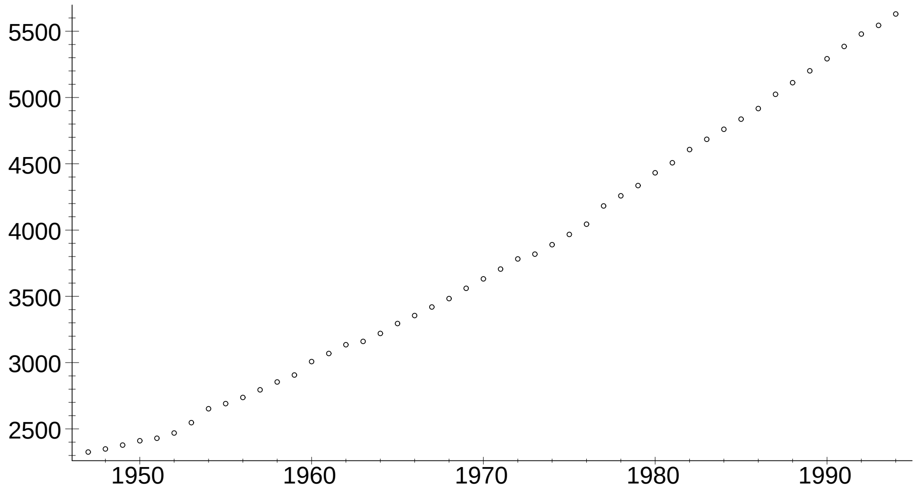


Abb. 6: Weltbevölkerungszahlen laut Erstveröffentlichung im Demographic Yearbook

Ein extremes Beispiel hierzu bieten die Daten für die jährliche Schätzung der Weltbevölkerung, so wie sie jeweils frisch (im allgemeinen zwei Jahre nach dem zu schätzenden Jahr) im *Demographic Yearbook* der Vereinten Nationen veröffentlicht sind. Abbildung 6, die diese Daten für die inzwischen zur Verfügung stehenden Jahre zwischen 1947 und 1994 darstellt, zeigt eine einigermaßen glatte Kurve, während die Darstellung der Wachstumsraten in Abbildung 7 auf ein sprunghaftes Steigen und Sinken der

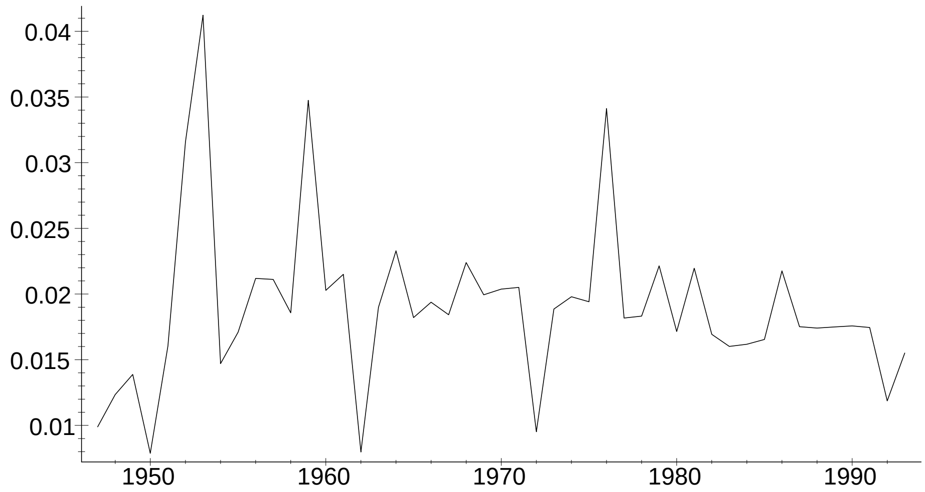


Abb. 7: Wachstumsraten zu den Daten aus Abbildung 6

Wachstumsraten hindeutet, das in dieser Form sicherlich nicht stattgefunden hat.

In der Numerik wirkt man diesem Effekt entgegen, indem man bei der numerische Differentiation im allgemeinen zunächst zur Glättung der Daten einen Spline berechnet, der die Funktion f approximiert, und dann diese Splinefunktion differenziert. Ähnlich gehen auch die Vereinten Nationen vor, wenn sie Zeitreihen für die Bevölkerungsentwicklung aufstellen: Auch hier werden ältere Daten anhand neuerer Volkszählungen durch Rückrechnen korrigiert um plausible Wachstumsraten zu erhalten. So wurde beispielsweise die Schätzung für die Weltbevölkerung im Jahre 1950 im Laufe der Jahre mehrfach nach oben korrigiert (was vielleicht auch ein interessant zu modellierender Wachstumsprozeß ist), und zwar *nicht,* weil zwischenzeitlich neue Unterlagen aus dem Jahr 1950 aufgetaucht sind, sondern weil alte Schätzungen für 1950 in mehreren Ländern aufgrund von späteren Volkszählungen nicht mehr glaubhaft erschienen.

Da eine numerische Glättung der Daten für die Schule wohl zu aufwendig sein dürfte (zumindest, wenn man gleichzeitig auch noch die Modellierung des Bevölkerungswachstums behandeln möchte), sei auch hier darauf verzichtet; wir müssen dann allerdings darauf gefaßt sein, daß auch Daten, die eigentlich recht gut durch ein exponentielles Wachstumsgesetz beschrieben werden können, zu einer nicht sehr glatten Kurve der Wachstumsraten führen.

Eine geglättete Zeitreihe zum Weltbevölkerungswachstum von 1950–2050, mit (ebenfalls angegebenen) „glatten“ Wachstumsraten stellt das *Bureau of the Census* unter http://www.census.gov/ipc/www/worldpop.html zur

Verfügung; falls man damit arbeiten möchte, kann man die hier angesprochenen Probleme also umgehen.

Ein weiterer Nachteil der oben angegebenen Berechnung von Wachstumsraten läßt sich dagegen einfach ausräumen: Wir hatten die Ableitung im Punkt t_i nur aufgrund des Verhaltens im Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ berechnet; besser ist es, wenn man auch das Intervall $[t_{i-1}, t_i]$ mitberücksichtigt und den Mittelwert

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i}\right)$$

beider Differenzenquotienten betrachtet. Natürlich kann dieser Mittelwert nur für $i \geq 2$ gebildet werden.

Im Falle von äquidistanten Zeitpunkten fällt dabei der Wert y_i heraus und wir erhalten einfach den zweiseitigen Quotienten

$$f'(t_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}},$$

der für Polynomfunktion vom Grad höchstens zwei exakt gleich $f'(t)$ ist. Zumindest für äquidistante Daten empfiehlt sich also diese Vorgehensweise.

2.5 Anwendung auf Bevölkerungszahlen

Als Beispiel betrachten wir natürlich die drei Zeitreihen aus §1.5:

a) Die Bevölkerung auf dem Gebiet der alten Bundesrepublik:

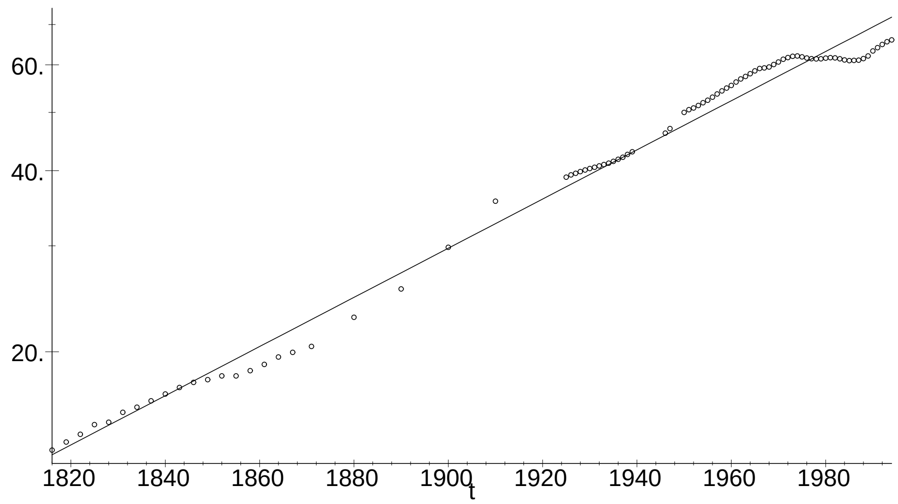


Abb. 8: Logarithmische Darstellung des Bevölkerungswachstums in der alten Bundesrepublik

Abbildung 8 zeigt die Logarithmen der Bevölkerungszahlen in Abhängigkeit von der Zeit; angesichts der geringen Erwartungen, die wir nach der völligen Ausklammerung geschichtlicher Einflüsse an eine Modellierung dieser Zeitreihe stellen können, ist die Übereinstimmung erstaunlich gut. Besser noch wird sie, wenn wir die Ausgleichsgerade nur anhand der Datenpunkte bis 1974 bestimmen; Abbildung 9 zeigt die dadurch gewonnene Exponentialkurve. Vergleicht man sie mit den ebenfalls eingezeichneten Datenpunkten, so erkennt man klar gewisse Epochen der deutschen Geschichte.

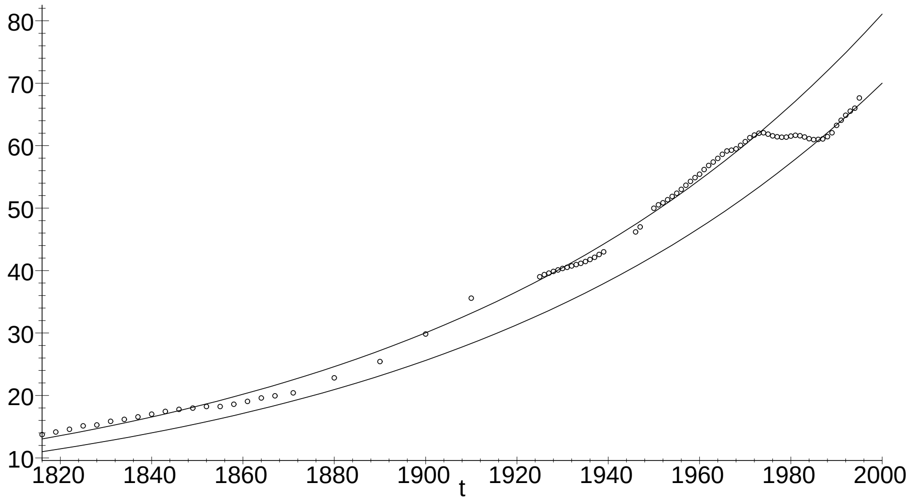


Abb. 9: Exponentielles Bevölkerungswachstum in der alten Bundesrepublik vor 1974 und nach 1985

Man kann also davon ausgehen, daß die Änderungsrate der Bevölkerung bis 1974 im Mittel ziemlich genau bei einem Prozent pro Jahr lag (die Gerade hat eine Steigung von 0,009931), wobei es geschichtlich bedingte Abweichungen nach oben und nach unten gab. Fast dieselbe Steigung, nämlich 0,010058, hat auch die Ausgleichgerade durch die Datenpunkte ab 1985; sieht man ab von der Phase zwischen 1974 und 1985, beschreibt das Exponentialgesetz das deutsche Bevölkerungswachstum zwischen 1816 und 1995 also im Rahmen dessen, was man angesichts der bewegten Geschichte der letzten zweihundert Jahre erwarten kann, erstaunlich gut.

Beachtet man allerdings auch, daß die Entwicklung der letzten Jahre überwiegend von Wanderungsbewegungen sowohl innerhalb Deutschlands (wir betrachten schließlich nur das Gebiet der alten Bundesrepublik) als auch von außerhalb (1,1 Millionen Aussiedler zwischen 1990 und 1995) bestimmt wurde, wird auch klar, daß die hier berechnete Kurve nicht zur langfristigen Vorhersage der Bevölkerungsentwicklung extrapoliert werden kann.

***b)* Die Bevölkerung der Vereinigten Staaten:**

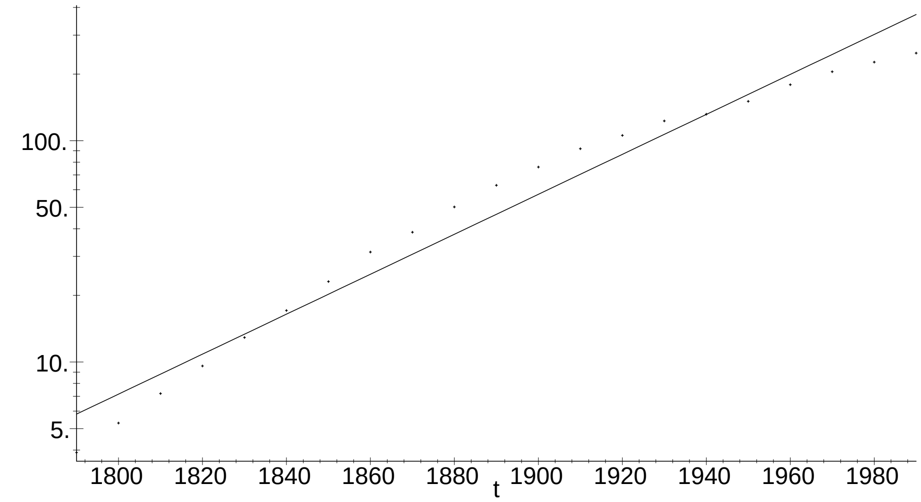


Abb. 10: Logarithmische Darstellung des Bevölkerungswachstums in den Vereinigten Staaten

Hier zeigt die Darstellung mit logarithmischer Skala in Abbildung 10 sofort, daß das exponentielle Wachstum für diese Daten offensichtlich ein ungeeignetes Model ist: Anstelle einer Geraden erhalten wir eine deutlich konvexe Kurve.

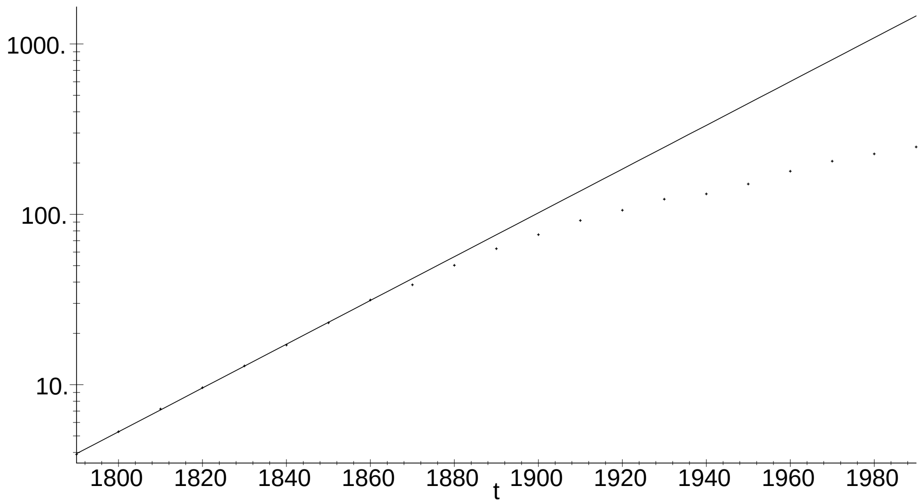


Abb. 11: Exponentialgesetz für die Vereinigten Staaten nach Daten von 1790-1860

Lediglich die Daten bis 1860 lassen sich, wie Abbildung 11 zeigt, recht gut durch ein Wachstumsgesetz mit einer konstanten Wachstumsrate von etwa drei Prozent beschreiben. Extrapoliert man allerdings dieses Wachstumsgesetz bis 1990, so ergibt sich eine dramatische Überschätzung der

Bevölkerung, die 1990 fast einen Faktor sechs erreicht. Insgesamt gesehen ist also das MALTHUSsche Wachstumsgesetz kein geeignetes Modell für die Modellierung der Bevölkerungsentwicklung in den Vereinigten Staaten seit 1790; benötigt wird ein alternatives Wachstumsgesetz mit *fallenden* Wachstumsraten.

c) Die Weltbevölkerung:

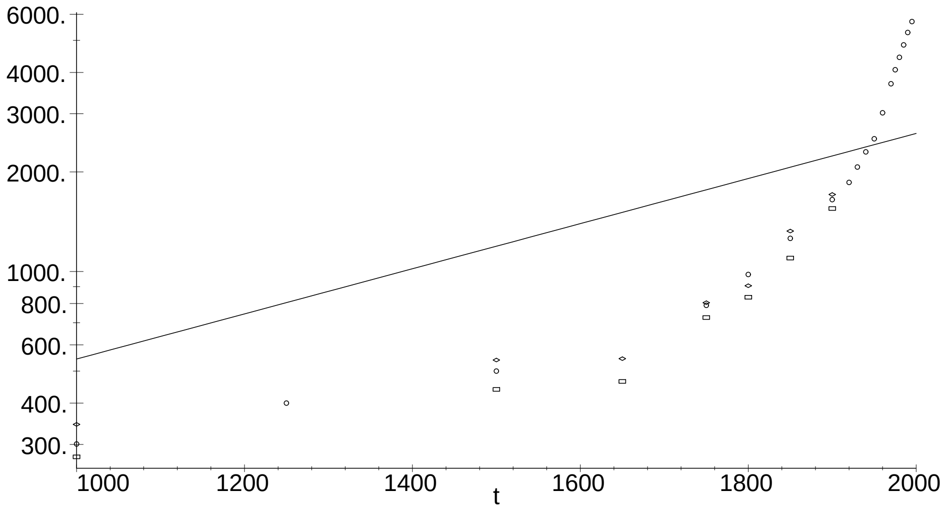


Abb. 12: Logarithmische Darstellung des Wachstums der Weltbevölkerung

Auch dies ist, zumindest auf den ersten Blick, kein geeignetes Beispiel für exponentielles Wachstum: Abbildung 12 zeigt eine deutlich konkave Kurve, und die Ausgleichsgerade hat die lächerlich geringe Steigung von knapp acht Promille.

Bedenkt man allerdings, daß alle Zahlen bis weit ins zwanzigste Jahrhundert hinein sehr spekulativ sind, ist es zumindest einen Versuch wert, die Ausgleichsgerade nur durch die neueren Datenpunkte zu legen. In der Tat dürfte aus Abbildung 7 durch Glätten eine ziemlich waagrechte Gerade entstehen, so daß man im Mittel wohl von einer einigermaßen konstanten Wachstumsrate ausgehen kann.

Die aus diesem Versuch resultierende Abbildung 13 zeigt dementsprechend auch eine deutlich bessere Übereinstimmung zwischen Daten und Ausgleichsgeraden bei leichten *Konvexität* der Daten. Auch die Wachstumsrate von 1,8% erscheint nun realistischer.

Rechnet man allerdings diese Kurve zurück bis zum Jahre Null, so zeigt Abbildung 14 so erhebliche Diskrepanzen zu den Schätzwerten, daß deren

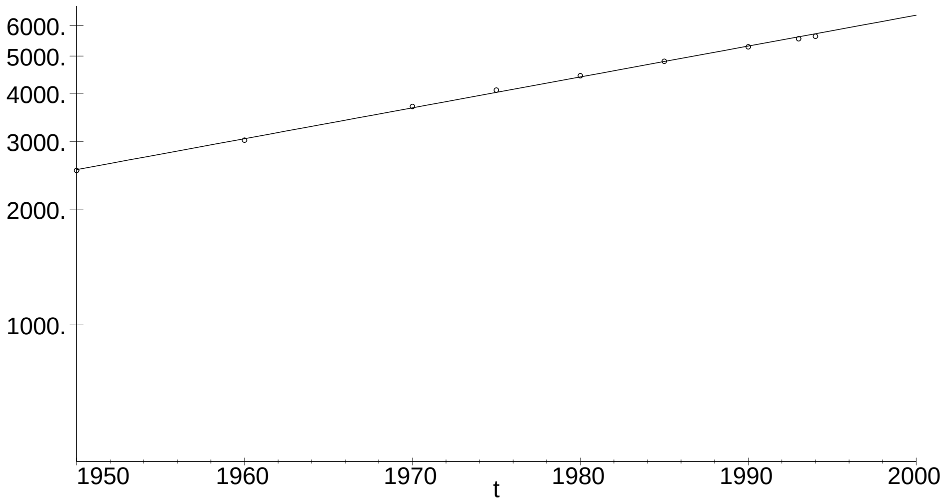


Abb. 13: Logarithmische Darstellung des Wachstums der Weltbevölkerung ab 1950

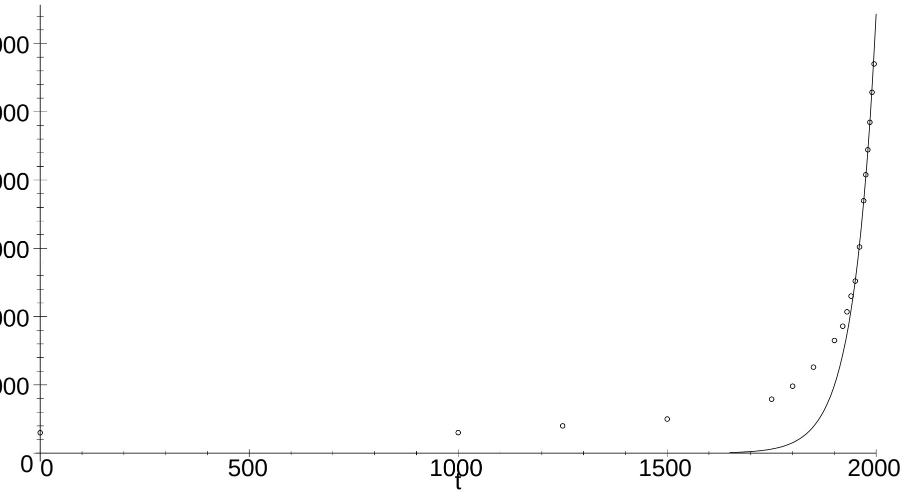


Abb. 14: Weltbevölkerung und Exponentialkurve aufgrund der Daten ab 1950

Unzuverlässigkeit allein nicht mehr zur Erklärung ausreicht; über den Gesamtzeitraum der letzten dreihundertfünfzig Jahre wuchs die Weltbevölkerung definitiv *schneller* als exponentiell. Dasselbe gilt auch noch für das zwanzigste Jahrhundert, denn legt man die Ausgleichsgerade durch *alle* Datenpunkte seit 1900, erhält man eine Wachstumsrate von nur 1,6% anstelle der 1,8% ab 1950.

Damit ist das MALTHUSsche Wachstumsgesetz kein geeignetes Modell für die Modellierung des Wachstums der Weltbevölkerung; hier wird allerdings ein alternatives Wachstumsgesetz mit *steigenden* Wachstumsraten benötigt – zumindest wenn man den Gesamtzeitraum betrachtet.

3. Weitere Beispiele für exponentielles Wachstum

Wie wir gesehen haben, läßt sich keines der drei Beispiele zum Bevölkerungswachstum durchgehend durch eine Exponentialfunktion beschreiben. Zumindest wenn man die Exponentialfunktion wie oben vorgeschlagen in einem Modellierungskontext einführt, sollte man daher auch andere Beispiele betrachten, bei denen das exponentielle Wachstumsgesetz zu größerem Erfolg führt.

In diesem Kapitel habe ich daher Beispiele aus verschiedenen Anwendungsgebieten zusammengestellt, für die ein Exponentialgesetz entweder naturgesetzlich oder aber empirisch gilt. Fast alles Material in diesem Kapitel stammt aus einer Vorlesung *Mathematische Übungen für Geographen,* wo ich es schon mehrfach behandelt habe mit Studenten, deren Vorkenntnisse sich oftmals auf (teilweise sehr dürftige) Grundkursmathematik beschränkte; es sollte also zumindest vom Schwierigkeitsgrad her auch für die Schule geeignet sein.

Der Rest dieses Vortrags wird nie auf dieses Kapitel zurückkommen; es kann also bei mangelndem Interesse problemlos überschlagen werden.

3.1 Radioaktiver Zerfall

Als erstes Beispiel, das auch zu praktisch relevanten Anwendungen führt, bietet sich die *Radioaktivität* an: Gegeben sei eine gewisse Menge eines radioaktiven Stoffes; wir betrachten die Funktion $m(t)$, die angibt, welche Masse zur Zeit t vorhanden ist. Wegen des radioaktiven Zerfalls nimmt $m(t)$ bei hinreichend großer Stoffmenge kontinuierlich ab, und zwar lehrt uns die Physik, daß die Anzahl der Zerfälle pro (kleiner) Zeiteinheit proportional ist zur noch vorhandenen Masse des Stoffs, d.h.

$$m'(t) = -\lambda m(t) ,$$

wobei die (positive) *Zerfallskonstante* λ vom Stoff abhängt. Wenn wir davon ausgehen, daß wir die zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhandene Menge $m_0 = m(0)$ kennen, ist

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-\lambda t} .$$

***a)* Halbwertszeit:** Meistens wird die Radioaktivität einer Substanz nicht durch ihre Zerfallskonstante angegeben, sondern durch ihre *Halbwertszeit* $t_{1/2}$: Das ist jene Zeit, in der die Hälfte der vorhandenen Masse zerfällt, d.h. $m(t_{1/2}) = \frac{1}{2} m_0$. Wenn wir dies in die obige Formel einsetzen, erhalten wir

$$m(t_{1/2}) = m_0 \cdot e^{-\lambda t_{1/2}} = \tfrac{1}{2} m_0 \quad \text{oder} \quad e^{-\lambda t_{1/2}} = \tfrac{1}{2}$$

oder

$$\lambda t_{1/2} = -\ln \tfrac{1}{2} = \ln 2\,;$$

Zerfallskonstante und Halbwertszeit sind also über die Beziehungen

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \qquad \text{und} \qquad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

miteinander verbunden. Der hierbei auftretende (natürliche) Logarithmus von zwei hat den Wert

$$\ln 2 \approx 0,69314\,71805\,59945\,30941\,72321\,21458\,17656\,80755\,.$$

***b)* Tschernobyl:** Als erstes konkretes Beispiel einer Anwendung der Exponentialfunktion wollen wir ausrechnen, inwieweit die bei der Reaktorkatastrophe von Tschernobyl freigesetzten radioaktiven Stoffe inzwischen abgebaut sind. Am problematischsten ist bekanntlich das Cäsium 137; es hat eine Halbwertszeit von 30,14 Jahren und damit die Zerfallskonstante

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \approx 0,023\,.$$

Das Zerfallsgesetz is demnach

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-0,023 \cdot t} \quad \text{mit in Jahren gemessenem } t\,.$$

Der Zeitpunkt Null, zu dem sich die Katastrophe ereignete, war der 26. April 1986. Seither sind elf Jahre vergangen, die noch vorhandene Masse des Cäsiums 137 ist also

$$m(11) = m_0 \cdot e^{-0,023\,\cdot\,7,5} \approx 0,78\,m_0\,.$$

Also sind etwa 22% des freigesetzten Cäsiums 137 zerfallen; die restlichen 78% befinden sich noch irgendwo in der Umwelt.

3.2 Radioaktive Altersbestimmung

Glücklicherweise läßt sich das radioaktive Zerfallsgesetz nicht nur auf Katastrophen anwenden; es hat auch erfreulichere Anwendungen. Eine Hauptanwendung ist die *Datierung* von Proben, die radioaktive Substanzen enthalten: Falls man weiß, wie viel radioaktives Material zur Entstehungszeit vorhanden war, kann man nachmessen, wieviel davon jetzt noch übriggeblieben ist und kann dann nach dem Zerfallsgesetz das Alter der Probe berechnen. Beginnen wir mit dem bekanntesten Beispiel:

a) **Die C^{14}-Methode:** Dieses 1949 von LIBBY eingeführte Verfahren geht aus vom Mengenverhältnis der verschiedenen Kohlenstoffisotope: Das bei weitem häufigste Kohlenstoffisotop ist das stabile C^{12}; daneben gibt es im wesentlichen nur noch das sehr kurzlebige Isotop C^{13} und das Isotop C^{14} mit einer Halbwertszeit von 5763 Jahren. C^{14} entsteht regelmäßig in der Atmosphäre durch Neutronenstrahlung von der Sonne: Wird ein Stickstoffatom N^{14} von einem Neutron getroffen, so wird dieses Neutron in den Atomkern eingebaut und statt dessen ein Proton abgegeben; also entsteht C^{14}. Dieses C^{14} wird von allen lebenden Organismen eingeatmet und wie gewöhnliches C^{12} weiterverarbeitet; insbesondere wird es also überall in die organische Substanz eingebaut. Nach dem Tod des Organismus gilt dies nicht mehr: Die Neutronenstrahlung ist (zum Glück) nicht stark genug, um in den Organismus einzudringen, so daß nun kein neues C^{14} mehr zugeführt wird, sondern nur noch das alte zerfällt.

Um dies quantitativ zu formulieren, gehen wir davon aus, daß der Organismus zu Lebzeiten eine gewisse Menge m_0 an C^{14} enthält. Nach dem Zerfallsgesetz ist dann, wenn man den Nachschub an neuem C^{14} zunächst außer acht läßt, $m(t) = m_0 \cdot e^{-\lambda t}$ und damit

$$m'(t) = -\lambda \cdot m_0 \cdot e^{-\lambda t} = -\lambda \cdot m(t)$$

oder

$$m(t+h) \approx m(t) - \lambda \cdot m(t) \cdot h\,.$$

Im Zeitraum zwischen t und $t+h$ zerfällt also die Masse $\lambda \cdot m(t) \cdot h$. Für einen *lebenden* Organismus gilt dies nur für $t = 0$, denn danach wird ja gleich wieder neues C^{14} eingeatmet, und dieses ersetzt das gerade zerfallene. Also zerfällt hier in einem Zeitraum der Länge h die Masse $\lambda \cdot m_0 \cdot h$. Nun nehmen wir an, der Organismus sterbe zum Zeitpunkt $t = 0$, und wir messen zu einem späteren Zeitpunkt t die in einem Zeitraum h zerfallende Masse. Dann erhalten wir das Ergebnis

$$\lambda \cdot m(t) \cdot h = \lambda \cdot m_0 \cdot e^{-\lambda t} \cdot h\,,$$

denn jetzt gibt es keinen Nachschub mehr an frischem C^{14}. Also zerfällt jetzt im gleichen Zeitraum h um den Faktor $e^{-\lambda t}$ weniger C^{14}.

Die Masse des zerfallenden C^{14} läßt sich zwar nur schwer direkt bestimmen, aber die Anzahl der Zerfälle kann mit einem Zählrohr gemessen werden; da alle zerfallenden C^{14}-Atome die gleiche Masse haben, ist diese Anzahl proportional zur Menge des zerfallenden Materials. Ist also Z_{lebend} die Anzahl der Zerfälle in einem vorgegebenen Zeitraum h für den lebenden Organismus und Z_{tot} die entsprechende Zahl für den zum Zeitpunkt $t = 0$ verstorbenen, so ist

$$\frac{Z_{\text{tot}}}{Z_{\text{lebend}}} = e^{-\lambda t} \quad \text{oder} \quad t = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{Z_{\text{tot}}}{Z_{\text{lebend}}}\right).$$

Da C^{14} eine Halbwertszeit von 5736 Jahren hat, ist

$$\lambda = \frac{\ln 2}{5736} \approx 0{,}00012084, \quad \text{also} \quad t \approx -8275{,}3 \ln\left(\frac{Z_{\text{tot}}}{Z_{\text{lebend}}}\right).$$

***b)* Anwendungen der C^{14}-Methode:** Als typisches Beispiel eines bei C^{14}-Datierungen auftretenden Organismus betrachten wir Holz: Bei lebendem Holz geht man aus von 6,68 Zerfällen pro Gramm und Minute, ein Wert der bis zum Beginn der Atomversuche in den fünfziger Jahren galt und von dem man annimmt, daß er im Verlauf der Erdgeschichte ziemlich konstant blieb. Für ein Stück Holz, das 1950 als Kohle in den Höhlen von Lascoux gefunden wurde und von dem man annimmt, daß es von einem Feuer jenes Stammes kommt, der die dortigen Höhlenmalereien schuf, maß man nur 0,97 Zerfälle pro Gramm und Minute – das ganze natürlich hochgerechnet auf die Masse des Holzes, aus dem die Kohle entstanden ist. Für das Alter des Kohlestücks ergibt sich somit

$$t = -8275{,}3 \cdot \ln\left(\frac{0{,}97}{6{,}68}\right) \approx -8275{,}3 \cdot (-1{,}92958) \approx 15968\,,$$

die Höhlenmalereien sind also etwa 16000 Jahre alt.

Für ein entsprechendes Stück Kohle von einem Dach aus der babylonischen Stadt Nippur, das der Zeit Hamurabis zugeschrieben wird und das ebenfalls um 1950 gefunden wurde, maß man entsprechend 4,09 Zerfälle pro Gramm und Minute; hier ist also

$$t = -8275{,}3 \cdot \ln\left(\frac{4{,}09}{6{,}68}\right) \approx -8275{,}3 \cdot (-0{,}497935) \approx 4060\,.$$

***c)* Genauigkeit der C^{14}-Methode:** Falls Z_{tot} sehr klein ist, kommen wir in Bereiche, in denen die Exponentialfunktion sehr flach wird; große Änderungen der Zeit entsprechen also nur noch minimalen Änderungen von Z_{tot}. Hinzu kommt, daß dann auch unser Modell des radioaktiven Zerfalls an seine Grenzen stößt: Das radioaktive Zerfallsgesetz geht aus von *kontinuierlichen* Massen; bei nur wenigen Zerfällen pro Zeiteinheit macht sich aber immer stärker bemerkbar, daß die Massenänderung *diskret* ist, nämlich ein ganzzahliges Vielfaches der Masse eines C^{14}-Atoms. Auch unterliegt die Zerfallsrate bekanntlich statistischen Schwankungen, so daß für den Bereich kleiner Zerfallszahlen ein stochastisches Modell betrachtet werden muß.

Das entsprechenden physikalische Modell lehrt, daß die Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit einer sogenannten POISSON-Verteilung gehorcht; darüber müssen wir in diesem Zusammenhang nur wissen, daß diese Verteilung von einem Parameter μ abhängt, der gleichzeitig der Mittelwert bei hinreichend häufiger Wiederholung des Versuchs ist, und daß sie die Varianz $\sqrt{\mu}$ hat. Letzteres bedeutet, daß etwa zwei Drittel aller beobachteten Werte zwischen $\mu - \sqrt{\mu}$ und $\mu + \sqrt{\mu}$ liegen; wiederholt man den Versuch n-mal und bildet den Mittelwert der Versuchsergebnisse, liegt dieser in etwa zwei Drittel der Fälle zwischen $\mu - \sqrt{\mu/n}$ und $\mu + \sqrt{\mu/n}$.

Um „den“ Wert von Z_{tot} zu bestimmen, der ins Zerfallsgesetz eingesetzt werden muß, macht man daher mehrere Messungen und nimmt deren Mittelwert. Das gleiche gilt im Prinzip auch für Z_{lebend}, und ähnliches gilt auch für die Halbwertszeit, aber da Z_{lebend} beispielsweise anhand von lebendem Holz bestimmt werden kann, das in praktisch beliebiger Menge zur Verfügung steht, und da auch die Halbwertszeit von C^{14} recht gut im Labor bestimmt werden kann, wollen wir bei der Fehleranalyse des C^{14}-Verfahrens nur den durch Z_{tot} verursachten Fehler berücksichtigen.

Ist $\widetilde{Z}_{\text{tot}}$ der gemessene Wert und Z_{tot} der aufgrund des „wahren“ Alters der Probe errechnete Wert, so bezeichnen wir die Differenz $\widetilde{Z}_{\text{tot}} - Z_{\text{tot}}$ als *absoluten* Fehler und den Quotienten

$$\varepsilon = \frac{\widetilde{Z}_{\text{tot}} - Z_{\text{tot}}}{Z_{\text{tot}}}$$

als *relativen* Fehler. Offensichtlich ist mit dieser Bezeichnung

$$\widetilde{Z}_{\text{tot}} = Z_{\text{tot}} \cdot (1 + \varepsilon)\,.$$

Im Beispiel von Lascoux hatten wir $Z_{\text{tot}} = 0,97$; wenn wir annehmen, daß diese Messung mit einem relativen Fehler von etwa $\pm 3\% = \pm 0,03 \approx \pm\sqrt{0{,}97}$ behaftet ist, kommen wir also für das Alter der Probe auf die untere Schranke

$$\begin{aligned} t_1 &= -\alpha \cdot \ln\Big(\frac{Z_{\text{tot}} \cdot 1,03}{Z_{\text{lebend}}}\Big) \\ &= -\alpha \cdot \big(\ln Z_{\text{tot}} + \ln(1,03) - \ln Z_{\text{lebend}}\big) \\ &= t - \alpha \cdot \ln(1,03) \approx 15723 \text{ Jahre,} \end{aligned}$$

wobei für α der Wert von 8275,3 Jahren eingesetzt wurde. Entsprechend kommen wir für den Fall, daß der Fehler negativ war, auf den Höchstwert von

$$t_2 = t + \alpha \cdot \ln(0,97) \approx 16212 \text{ Jahre.}$$

Das Alter der Probe liegt also auf jeden Fall bei etwa 16 000 Jahren, und genauer wird das in diesem Zusammenhang wohl auch nicht interessieren.

Falls das Alter der Probe allerdings in die Größenordnung von mehreren hundert Tausend oder gar Millionen Jahren kommt, wie das etwa bei geologischen Datierungsaufgaben häufig der Fall ist, würde Z_{tot} so klein und der relative Fehler $\varepsilon \approx \sqrt{Z_{tot}}$ gleichzeitig im Verhältnis dazu so groß, daß man von der C^{14}-Methode keine sinnvollen Ergebnisse erwarten mehr erwarten kann; man kann also nicht etwa das Alter von Erdölvorkommen nach dieser Methode bestimmen.

Deshalb verwenden die Geologen radioaktive Stoffe mit erheblich größeren Halbwertszeiten, vor allem die schweren radioaktiven Kerne im hinteren Teil des Periodensystems. Für diese Atome gibt es mehrere Zerfalls*reihen,* sie zerfallen also nicht einfach in einen stabilen Kern, sondern der entstehende Kern ist selbst wieder radioaktiv mit einer neuen Halbwertszeit *usw.,* bis am Ende (meistens) das stabile Blei entsteht. Die Ausgangskonzentration eines radioaktiven Stoffs muß daher aufgrund der Konzentrationen der verschiedenen Zwischenprodukte errechnet werden, so daß hierfür weitergehende Mathematik- und Physikkenntnisse notwendig sind, als in dieser Vorlesung vorausgesetzt werden können.

Um trotzdem ein Beispiel durchzurechnen, wollen wir annehmen, daß wir bereits wissen, daß in einer gegebenen Probe Samarskit (Y, U, Ca)(Nb, $Fe^{3+})_2(O, OH)_6$ vom ursprünglich vorhandenen Thorium Th^{232} ein Teil zu $0,0376$ Gramm Blei Pb^{208} zerfallen sei, und daß die Probe noch drei Gramm Thorium enthalte.

Da sich die Massen von Blei- und Thoriumatomen wie 208 zu 232 verhalten, entstanden die $0,0376$ Gramm Blei aus $0,0376 \cdot \frac{232}{208} = 0,0419$ Gramm Thorium; die Probe enthielt also ursprünglich 3,0419 Gramm Thorium. Davon sind noch drei Gramm übrig, also ist

$$3g = 3,0419g \cdot e^{-\lambda t}$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda &= \ln 2/13,9 \text{Mrd. Jahre} = 0,0498667/\text{Mrd. Jahre} \\ &= 49,8667/\text{Mio. Jahre}\,, \end{aligned}$$

denn Thorium-232 hat eine Halbwertszeit von 13,9 Mrd. Jahren. Mit

$$\lambda t = -\ln \frac{3}{3,0419} \approx 0,01387$$

kommen wir also auf ein Alter der Probe von

$$t \approx 278 \text{ Mio. Jahren.}$$

3.3 Das Newtonsche Abkühlungsgesetz

Dieses von NEWTON 1701 aufgestellte empirische Gesetz fehlt in kaum einem der neueren Lehrbücher über gewöhnliche Differentialgleichungen. In Physikbüchern findet man es dagegen nur selten, und dann, wie etwa in [**MRW**], S. 280 mit einem warnenden Hinweis der Form

> NEWTON*'s law of cooling is not even approximately correct, but, when the cooling correction is small and the difference is not more than* 5°*, its incorrectness will not generally introduce an appreciable error into the result.*

Das „Gesetz“ besagt, daß die Abkühlungsrate eines Körpers proportional ist zur Differenz zwischen der Temperatur des Körpers und der Umgebungstemperatur; ist also $\vartheta(t)$ die Temperatur des Körpers zur Zeit t und ϑ_∞ die Umgebungstemperatur, so soll

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \alpha(\vartheta - \vartheta_\infty)$$

sein mit einer (von der jeweiligen Situation abhängigen) Konstanten α. Schreibt man dies in der Form

$$\frac{d(\vartheta - \vartheta_\infty)}{dt} = \alpha(\vartheta - \vartheta_\infty)$$

als Differentialgleichung für die Temperaturdifferenz $\vartheta - \vartheta_\infty$, erhält man sofort die Lösung

$$\vartheta(t) - \vartheta_\infty = \big(\vartheta(0) - \vartheta_\infty\big)e^{\alpha t}$$

oder

$$\vartheta(t) = \vartheta_\infty + \big(\vartheta(0) - \vartheta_\infty\big)e^{\alpha t}\,.$$

Als praktisches Beispiel wird in [**GT**], §2.5, das Abkühlen von Kaffee in einer Keramiktasse behandelt; die Temperatur wurde im Minutenabstand gemessen mit einer geschätzen Genauigkeit von 0,1°C. Bei einer Umgebungstemperatur von 22°C ergaben sich nach n Minuten folgende Temperaturen ϑ, gemessen jeweils in Grad Celsius:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
ϑ	83,0	77,7	75,1	73,0	71,1	69,4	67,8	66,4

n	8	9	10	11	12	13	14	15
ϑ	64,7	63,4	62,1	61,0	59,9	58,7	57,8	56,6

Falls das NEWTONsche Abkühlungsgesetz gilt, ist

$$\ln\bigl(\vartheta(t) - \vartheta_\infty\bigr) = \ln\bigl(\vartheta(0) - \vartheta_\infty\bigr) + \alpha t$$

und damit

$$\alpha = \frac{\ln \dfrac{\vartheta(t) - \vartheta_\infty}{\vartheta(0) - \vartheta_\infty}}{t}$$

für alle Werte von t. Als Schätzwert für α empfiehlt sich daher das arithmetische Mittel dieser Werte für $t = 0, \ldots, 15$; die Rechnung führt auf den Wert $-0{,}0495$ und die nicht sonderlich gut zu den Daten passende gestrichelte Kurve aus Abbildung 15 mit der Gleichung

$$\vartheta(t) = 22 + 61e^{-0{,}0495t}\,.$$

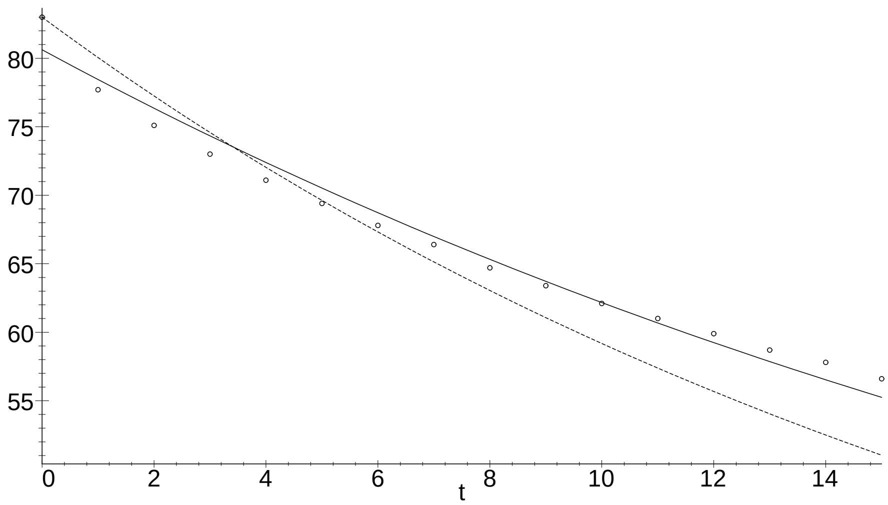


Abb. 15: Abkühlung von Kaffee in einer Keramiktasse

Es wäre nun allerdings ungerecht, allein das NEWTONsche Abkühlungsgesetz für die Diskrepanzen zwischen Kurve und Daten verantwortlich zu machen: Auch die Schätzung der Parameter war nicht optimal: Wir haben α geschätzt unter der Voraussetzung, daß ϑ_0 exakt bekannt ist, wohingegen alle anderen Temperaturangaben fehlerbehaftet sein können. Tatsächlich macht gerade der Wert von ϑ_0 den Eindruck, er könne ein Ausreißer sein; besser ist es also, auch ihn aufgrund der gesamten Zeitreihe zu schätzen.

Dazu schätzen wir zunächst die Abkühlungsrate α als Mittelwert der anhand zweier benachbarter Werte berechneten Wachstumsraten

$$\alpha_t = \ln \frac{\vartheta(t) - \vartheta_\infty}{\vartheta(t-1) - \vartheta_\infty}$$

für $t = 1, \dots, 15$ und bestimmen dann die Differenz $\Delta = \vartheta_0 - \vartheta_\infty$ anhand der Gleichung

$$\vartheta(t) = \vartheta_\infty + \Delta e^{\alpha t}$$

als Mittelwert der Quotienten

$$\frac{\vartheta(t) - \vartheta_\infty}{e^{\alpha t}} .$$

Die Rechnung führt auf

$$\alpha = -0{,}0378 \quad \text{und} \quad \Delta = 58{,}6°\mathrm{C} \Longrightarrow \vartheta_0 = 80,6°\mathrm{C} .$$

Die immer noch nicht berauschende Kurve mit diesen Werten ist in Abbildung 15 durchgezogen. Eine etwas bessere Übereinstimmung könnte man erhalten, wenn man den Anfangswert für die Temperatur des Kaffees völlig ignoriert; der interessiere Leser möge dies nachrechnen.

3.4 Sauerstoffverbrauch im Klassenzimmer

Frische Luft enthält rund 21% Sauerstoff. Sperrt man allerdings dreißig Personen in ein Klassenzimmer mit geschlossenen Fenstern und Türen, so verbrauchen diese einen Teil davon, ohne daß nennenswert neuer Sauerstoff zugeführt wird; die Sauerstoffkonzentration sinkt also.

Wenn man den Daten aus Übungsaufgabe 20 in [**H**], S. 58 glauben kann, macht ein ruhig atmender Erwachsener etwa sechzehn Atemzüge pro Minute, wobei er ungefähr einen halben Liter Luft einatmet. Dieser Luft werden etwa 20% ihres Sauerstoffs entzogen, bevor sie wieder ausgeatmet wird.

Um dies mathematisch zu fassen, betrachten wir die Funktion

$$S(t) = \text{Sauerstoffmenge zur Zeit } t\,;$$

da eine sechzehntel Minute, die Zeit zwischen zwei Atemzügen, eine recht kurze Zeit ist, können wir die Ableitung ohne nennenswerten Fehler durch den Differenzenquotienten ersetzen und erhalten, daß

$$S'(t) = -\frac{\text{Verbrauch pro } \frac{1}{16} \text{ Minute}}{\frac{1}{16} \text{ Minute}}$$

ist. Der Verbrauch pro $\frac{1}{16}$ Minute durch eine Person ist der Sauerstoffverbrauch bei einem Atemzug. Die Sauerstoffkonzentration in einem Atemzug ist die gleiche wie die in der umgebenden Luft, also $S(t)/V$, wobei V das Volumen des Klassenzimmers ist.

Pro Atemzug wird ein halber Liter Luft eingeatmet; dieser enthält eine Sauerstoffmenge von $\frac{1}{2}\ell \cdot \frac{S(t)}{V}$, von der 20% verbraucht werden, also $\frac{1}{10}\ell \cdot \frac{S(t)}{V}$. Sind n Personen im Raum, so wird in jeder sechzehntel Minute das n-fache dieser Sauerstoffmenge verbraucht, d.h.

$$S'(t) = -\frac{\frac{n}{10}\ell \cdot \frac{S(t)}{V}}{\frac{1}{16}\,\text{min}} = -\frac{n \cdot 1{,}6\,\ell/\text{min}}{V} \cdot S(t)\,.$$

Damit sind wir wieder bei der Differentialgleichung für die Exponentialfunktion und können sofort die Lösung angeben als

$$S(t) = S(0) \cdot e^{-n \cdot 1{,}6/V}\,,$$

wobei V in Liter und t in Minuten gemessen wird.

3.5 Lernen und Vergessen

Als letztes Beispiel für exponentielles Wachstum oder exponentiellen Zerfall möchte ich das Lernen und Vergessen betrachten: Ein Schüler beginnt zur Zeit $t = 0$ einen für ihn neuen Prüfungsstoff zu lernen; sein Wissen zur Zeit t, wie immer das genau definiert sein soll, sei $W(t)$. Da der Prüfungsstoff zunächst völlig unbekannt sein soll, ist $W(0) = 0$. Natürlich kann kein Schüler unbegrenzt viel Stoff aufnehmen; $W(t)$ ist also beschränkt durch eine Schranke $W_{\max}$. Aus Erfahrung wissen wir, daß die Lernfähigkeit bei ununterbrochenem Lernen im Laufe der Zeit nachläßt; bei Versuchen mit dem Auswendiglernen sinnloser Silben (einem nicht gerade typischen Schulstoff), zeigte sich, daß der Lernfortschritt recht gut durch eine Gleichung der Form

$$W'(t) = c \cdot \big(W_{\max} - W(t)\big)$$

mit einem $c > 0$ beschrieben wird: Der Lernfortschritt ist also proportional zur noch vorhandenen Aufnahmekapazität. Diese Gleichung ist etwas verschieden von den bisher betrachteten; setzen wir aber $f(t) = W(t) - W_{\max}$, so ist $f'(t) = W'(t)$, also $f'(t) = -c \cdot f(t)$. Da $f(0) = -W_{\max}$ ist, folgt

$$f(t) = -W_{\max} \cdot e^{-ct} \quad \text{und} \quad W(t) = W_{\max} \cdot (1 - e^{-ct})\,.$$

Nach der Prüfung, für die wie der Einfachheit halber wieder den Zeitpunkt $t = 0$ zugrunde legen wollen, beginnt dann die Zeit des Vergessens. Da (hoffentlich) nicht alles Lernen umsonst war, wird man davon ausgehen können, daß es ein Mindestwissen $W_{\min}$ gibt, das nie vergessen wird. Für den Rest gilt nach dem EBBINGHAUSschen Modell des Vergessens

$$W'(t) = -\gamma \cdot \big(W(t) - W_{\min}\big)$$

mit einer gewissen Konstante γ. (HERMANN EBBINGHAUS, 1850–1909, war ein deutscher Psychologe.) Mit $f(t) = W(t) - W_{\min}$ ist wieder völlig analog zu oben $f'(t) = W'(t) = \gamma \cdot f(t)$, also

$$f(t) = W(0) \cdot e^{-\gamma t} \quad \text{und} \quad W(t) = W_{\min} + \big(W(0) - W_{\min}\big) \cdot e^{-\gamma t}\,.$$

4. Logistisches und „antilogistisches“ Wachstum

In einer endlichen Welt kann weder lineares noch exponentielles Wachstum unbegrenzt andauern; irgendwann ist eine Grenze erreicht, die nicht mehr überschritten werden kann. Ein mathematisches Modell, in dem dies berücksichtigt wird, ist das *logistische Wachstum,* das der belgische Mathematiker PIERRE-FRANÇOIS VERHULST (1804–1849) im Jahr 1837 vorschlug: Durch eine mit steigender Population fallende Wachstumsrate sorgt es dafür, daß schließlich ein stabiles Gleichgewicht erreicht wird.

Für die Modellierung der hier betrachteten Bevölkerungsdatensätze reicht dieses Modell allerdings noch nicht aus; bei der Weltbevölkerung haben wir bis 1960 und zumindest im Durchschnitt auch global *steigende* Wachstumsraten. Daher soll hier auch ein Analogon des VERHULSTschen Modells betrachtet werden, das die Wachstumsraten ansteigen läßt.

4.1 Die Modellannahmen

Der einfachste Ansatz für eine fallende oder steigende Wachstumsrate ist eine *linear* fallende *bzw.* steigende; dies führt auf den Ansatz

$$\frac{y'}{y} = \alpha + \beta y$$

oder

$$y' = \alpha y + \beta y^2 .$$

Diese Differentialgleichung läßt sich auch inhaltlich interpretieren: Bei einer einigermaßen gleichmäßig verteilten Bevölkerung aus y Individuen, die sich mehr oder weniger zufällig bewegen, sollte die Anzahl der Begegnungen zwischen zwei Individuen ungefähr proportional zu $y(y-1)$ sein, was man bei den hier betrachteten Bevölkerungszahlen getrost durch y^2 ersetzen kann.

Der Effekt einer solchen Begegnung hängt ab von der allgemeinen Situation der Bevölkerung: Im Falle von beginnender oder tatsächlicher Übervölkerung führt eine solche Begegnung zu Streß, Konkurrenz um Nahrungsmittel und sonstige Resourcen *usw.,* hat also eine negative Auswirkung auf das Wachstum der Bevölkerung, was durch einen negativen Wert von β ausgedrückt wird.

Bei einer eher kooperierenden als konkurrierenden Bevölkerung dagegen kann man auch argumentieren, daß eine solche Begegnung zu Informations- und Ideenaustausch führt und damit zu Fortschritt bei der Erschließung der vorhandenen Resourcen. Für eine solche Bevölkerung müßte β dann positiv angesetzt werden.

Der Fall $\beta = 0$ ist natürlich nichts anderes als das gewöhnliche exponentielle Wachstum, der für das folgende daher ausgeschlossen werden kann.

Betrachten wir zunächst den von VERHULST als *logistisches Wachstum* bezeichneten Fall $\beta < 0$ (und $\alpha > 0$); die entsprechende Differentialgleichung

$$y' = \alpha y + \beta y^2 = -\beta y(K - y) \quad \text{mit} \quad K = -\alpha/\beta$$

wird daher als *logistische Gleichung* bezeichnet.

Wegen

$$\left\{ \begin{array}{c} y' > 0 \\ y' = 0 \\ y' < 0 \end{array} \right\} \text{ für } \left\{ \begin{array}{c} y < K \\ y = K \\ y > K \end{array} \right\}$$

ist K dann gerade die maximale Anzahl von Individuen, die das System ernähren kann. Beginnt man mit einer Bevölkerungszahl zwischen Null und K, steigt y also kontinuierlich an, bis K erreicht ist, während eine Bevölkerungszahl über K ebenso kontinuiertlich auch K abfällt; siehe dazu das Vektorfeld und eine der Lösungskurven in Abbildung 16. Insbesondere sieht man, daß $y \equiv K$ eine stabile Gleichgewichtslösung ist.

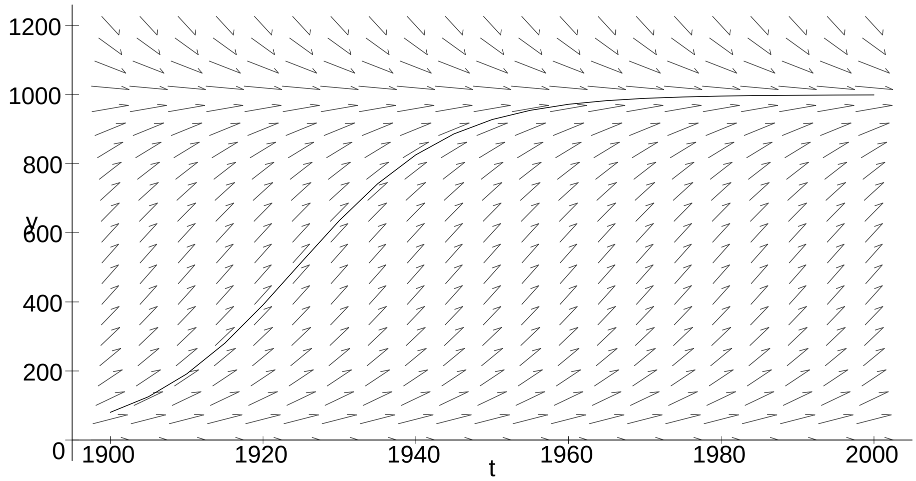


Abb. 16: Vektorfeld der logistischen Gleichung mit Lösungskurve

Die Lösungskurve hat eine ungefähr S-förmige Gestalt; etwas vornehmer spricht man von einer *sigmoiden* Form. Im Anfangsbereich steigt sie ungefähr wie eine Exponentialfunktion mit Wachstumsrate rK, dann wird sie zunehmend flacher, bis sie sich schließlich wie eine Exponentialfunktion mit negativem Exponenten der Sättigungsgrenze nähert.

Anders sieht es aus, wenn β positiv ist. Dann schreiben wir die Differentialgleichung als

$$y' = \alpha y + \beta y^2 = \beta y(y - K) \quad \text{mit} \quad K = -\alpha/\beta$$

und sehen, daß $y' > 0$ für $y > K$; für $y > K$ steigt die Bevölkerung also mit immer größer werdenden Wachstumsraten. Für diese Art von Wachstum gibt es keinen speziellen Namen; es kommt auch in Lehrbüchern üblicherweise nicht vor. Da sich die Wachstumsrate hier gerade entgegegengesetzt zum logistischen Wachstum verhält, soll es für die Zwecke dieses Vortrags kurz als „antilogistisches“ Wachstum bezeichnet werden.

Für $0 < y < K$ dagegen wird $y' = \beta y(y - K)$ negativ, die Bevölkerung stirbt daher aus. Für $\alpha > 0$ kann dieser Fall nicht vorkommen, da dann $K = -\alpha/\beta$ negativ ist; bei negativen α ist er theoretisch möglich, bei den hier betrachteten Daten aber nicht zu erwarten. Abbildung 17 zeigt das Vektorfeld und eine steigende wie auch eine fallende Lösungskurve für den Fall eines positiven K.

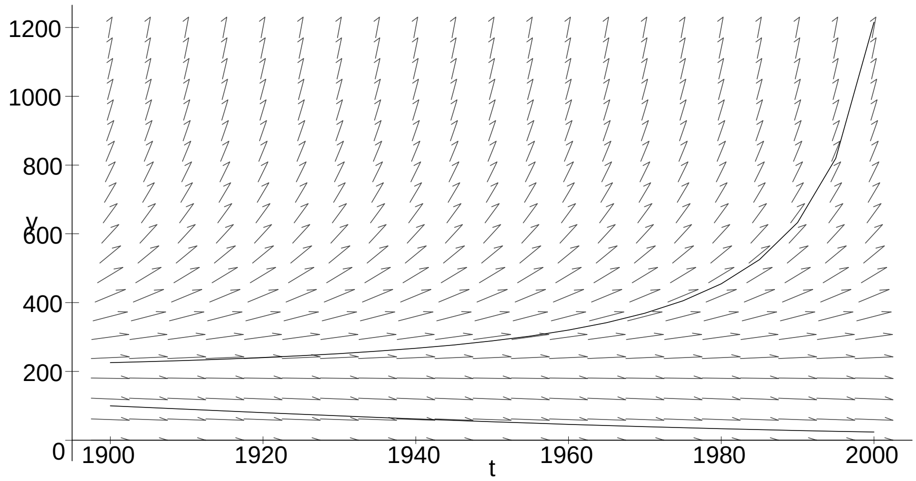


Abb. 17: Vektorfeld der „antilogistischen" Gleichung mit Lösungskurven

Damit haben wir bereits einen recht guten qualitativen Überblick über das logistische Wachstum; mit Standardregeln der Differential- und Integralrechnung kann man auch einen geschlossenen analytischen Ausdruck finden:

Ist $y = f(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \alpha y + \beta y^2 ,$$

so gilt für die Umkehrfunktion $t = g(y)$ von f

$$g'(y) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{\alpha y + \beta y^2} ,$$

also ist

$$g(y) = \int \frac{dy}{\alpha y + \beta y^2} ,$$

und wir müssen dieses Integral ausrechnen. Dazu schreiben wir

$$\frac{1}{\alpha y + \beta y^2} = \frac{1}{y \cdot (\alpha + \beta y)} = \frac{\frac{1}{y} - \frac{\beta}{\alpha + \beta y}}{\alpha} = \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{\alpha/\beta + y}}{\alpha}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} g(y) &= \int \frac{dy}{\alpha y + \beta y^2} = \frac{1}{\alpha}\int \frac{dy}{y} - \frac{\beta}{\alpha}\int \frac{dy}{\alpha + \beta y} \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(\ln|y| - \ln\left|\frac{\alpha}{\beta} + y\right|\right) + C\frac{1}{\alpha}\ln\left|\frac{y}{\alpha/\beta + y}\right| + C\,, \end{aligned}$$

wobei C wie üblich eine Integrationskonstante bezeichnet.

Diese können wir hier leicht anschaulich interpretieren:

Im Falle des logistischen Wachstums ist $\beta < 0$ und $K = -\alpha/\beta$ ist die Wachstumsgrenze für die betrachtete Bevölkerung. Mit K ausgedrückt ist

$$g(y) = \frac{1}{\alpha}\ln\left|\frac{y}{-K + y}\right| + C = \frac{1}{\alpha}\ln\left|\frac{y}{K - y}\right| + C\,,$$

d.h.

$$g(y) = C \Leftrightarrow y = K - y \Leftrightarrow y = K/2\,.$$

Da $t = g(y)$ als Umkehrfunktion von $y = f(t)$ definiert wurde, ist C also gerade jener Zeitpunkt, zu dem die Bevölkerung die Stärke $K/2$ erreicht.

Beim „antilogistischen" Wachstum ist $y > K$ und damit $|K - y| = y - K$. Der Logarithmus in obiger Gleichung verschwindet also genau dann, wenn $y = y - K$ ist, eine Gleichung, die für $K \neq 0$ keine Lösung $y \in \mathbb{R}$ hat. Allerdings ist

$$\lim_{y \to \infty} \frac{y}{y - K} = 1\,,$$

C ist also der Zeitpunkt, zu dem die Bevölkerung unendlich groß wird!

Somit kann C in beiden Fällen als ein Zeitpunkt interpretiert werden; wir schreiben daher

$$g(y) = \frac{1}{\alpha}\ln\left|\frac{y}{K - y}\right| + t_0\,.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $y = f(t)$ und $g(y) = t$, wird sie zu

$$\ln\left|\frac{f(t)}{K - f(t)}\right| = \alpha(t - t_0) = \alpha t - \alpha t_0\,;$$

die linke Seite ist also eine lineare Funktion der Zeit. Falls wir bereits einen Schätzwert für K kennen, läßt sich damit überprüfen, ob eine gegebene Wachstumsfunktion der logistischen Gleichung genügt – wir werden dies im nächsten Abschnitt anwenden.

Doch zunächst soll $y = f(t)$ noch vollends ausgerechnet werden: Wie wir gesehen haben ist

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{\alpha} \cdot \ln \left| \frac{y}{K-y} \right| + t_0 = -\frac{1}{\alpha} \cdot \ln \left| \frac{K-y}{y} \right| + t_0 \\ &= -\frac{1}{\alpha} \cdot \ln \left| \frac{K}{y} - 1 \right| + t_0 \,; \end{aligned}$$

diese Gleichung müssen wir nach y auflösen. Aus der gerade berechneten Beziehung

$$t = g(y) = -\frac{1}{\alpha} \cdot \ln \left| \frac{K}{y} - 1 \right| + t_0$$

folgt zunächst, daß

$$-\alpha \cdot (t - t_0) = \ln \left| \frac{K}{y} - 1 \right|$$

ist; Anwendung der Exponentialfunktion auf beide Seiten führt zu

$$e^{-\alpha(t-t_0)} = \left| \frac{K}{y} - 1 \right| .$$

Zur Elimination der Betragsstriche müssen wir wieder Fälle unterscheiden:

- Beim logistischen Wachstum ist K der Maximalwert für y, also ist K/y größer als 1 und die Betragsstriche sind überflüssig. Damit folgt

$$f(t) = y = \frac{K}{1 + e^{-\alpha \cdot (t-t_0)}} .$$

- Beim „antilogistischen" Wachstum treten nur Bevölkerungszahlen auf, die gößer als K sind; unabhängig vom Vorzeichen von K ist also

$$\left| \frac{K}{y} - 1 \right| = 1 - \frac{K}{y}$$

und damit

$$f(t) = y = \frac{K}{1 - e^{-\alpha \cdot (t-t_0)}} .$$

4.2 Wie erkennt man logistisches Wachstum?

Wie wir oben gesehen haben, ist für logistisches wie auch für „antilogistisches" Wachstum

$$\ln \left| \frac{f(t)}{K - f(t)} \right| = \alpha(t - t_0)$$

eine lineare Funktion der Zeit; solange wir aber K nicht kennen, läßt sich dies nicht anwenden – es sei denn, wir lassen uns ein auf nichtlineare Optimierungsprobleme, was für diesen Vortrag aber mit Sicherheit zu weit führen würde.

Wir müssen daher versuchen, uns irgendwie anders durchzumogeln, und in der Tat gibt es dazu einige Möglichkeiten.

Als erstes gehen wir aus vom Kehrwert

$$\frac{1}{y(t)} = \frac{1 + e^{-a(t-t_0)}}{K}$$

der Lösung. An der Stelle $t + h$ ist dann

$$\begin{aligned}\frac{1}{y(t+h)} &= \frac{1}{K} + \frac{e^{-a(t+h-t_0)}}{K} = \frac{1}{y(t)} + \frac{e^{-a(t+h-t_0)}}{K} - \frac{e^{-a(t-t_0)}}{K} \\ &= \frac{1}{y(t)} + \frac{e^{-ah}-1}{K} \cdot e^{-a(t-t_0)} .\end{aligned}$$

Da

$$e^{-a(t-t_0)} = \frac{K}{y(t)} - 1$$

ist, läßt sich dies weiter vereinfachen zu

$$\begin{aligned}\frac{1}{y(t+h)} &= \frac{1}{y(t)} + (e^{-ah}-1)\left(\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{K}\right) \\ &= \frac{1}{y(t)}e^{-ah} - \frac{e^{-ah}-1}{K} .\end{aligned}$$

Für konstantgehaltenes h hängt also $1/y(t+h)$ linear ab von $1/y(t)$; wir können daher Wertepaare $\big(1/y(t),\, 1/y(t+h)\big)$ betrachten und eine Ausgleichsgerade

$$\frac{1}{y(t+h)} = \alpha \cdot \frac{1}{y(t)} + \beta$$

durch diese Punkte legen. Aus α und β erhalten wir dann über die Formeln

$$a = \frac{-\ln\alpha}{h} \quad \text{und} \quad K = \frac{\alpha - 1}{\beta}$$

die Parameter a und K der logistischen Gleichung.

Dieses Verfahren läßt sich vor allem dann gut anwenden, wenn die zur Verfügung stehenden Daten äquidistant sind, wie etwa bei den amerikanischen Volkszählungsdaten, die jeweils zehn Jahre auseinander liegen, oder bei den neueren Daten der Bundesrepublik, die im Jahresrythmus veröffentlicht werden.

Bei unregelmäßigeren Daten müssen wir einen anderen Weg gehen: Die logistische Differentialgleichung

$$y' = \alpha y + \beta y^2$$

kann auch in der Form

$$\frac{y'}{y} = \alpha + \beta y$$

geschrieben werden, der Quotient y'/y ist also eine lineare Funktion von y. Zwar kennen wir in den hier betrachteten Beispielen nur die Funktionswerte $y = f(t)$, nicht aber die Ableitungen $y' = f'(t)$, aber wir können $f'(t)$, wie schon im Zusammenhang mit dem exponentiellen Wachstum diskutiert, einigermaßen durch Differenzenquotienten annähern – auch wenn dies zu einer beträchtlichen Aufrauhung der Daten führt.

Damit lassen sich die Werte $f'(t)/f(t)$ ungefähr schätzen und über $f(t)$ auftragen; falls der Zusammenhang einigermaßen linear ist, kann man die Ausgleichsgerade bestimmen und damit Schätzwerte für r und K ermitteln.

Sobald man K kennt, läßt sich die noch fehlende Integrationskonstante C *bzw.* der Wert $\alpha = e^C$ bestimmen, indem man die Werte

$$\ln\left|\frac{f(t)}{K - f(t)}\right|$$

über der Zeit aufträgt und eine Ausgleichsgerade der Steigung rK durch diese Punkte legt; deren Achsenabschnitt ist $-rC$. Da wir die Steigung der Geraden bereits kennen, ist dieser Wert einfach das arithmetische Mittel der Werte

$$\ln\left|\frac{y_i}{K - y_i}\right| - rKt_i\,.$$

4.3 Anwendung auf das Bevölkerungswachstum

Damit haben wir das nötige Rüstzeug, um die drei Bevölkerungszeitreihen auf logistisches Wachstum zu überprüfen. Wir beginnen wieder mit der (alten) Bundesrepublik.

***a)* Bundesrepublik Deutschland:** Die Kurve in Abbildung 18 ist so offensichtlich keine Gerade, daß es sich nicht lohnt, das Thema weiter zu verfolgen:

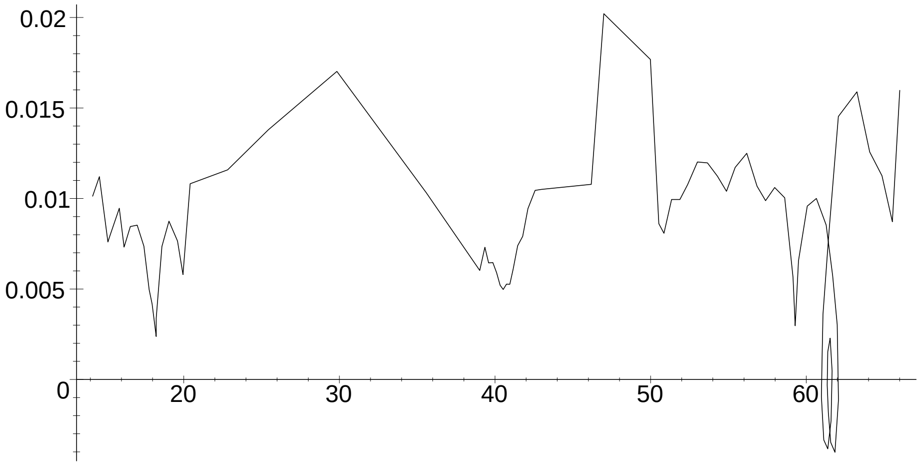


Abb. 18: Wachstumsrate über Bevölkerung für die Bundesrepublik

Die Ausgleichsgerade ist praktisch waagrecht, was auf Schwankungen um ein eher exponentielles Wachstum hindeutet. Berechnet man trotzdem mit brutaler Gewalt die besten Parameter für ein logistisches Wachstum, findet man einen minimalen Abwärtstrend der Wachstumsrate; falls das Bevölkerungswachstum in der alten Bundesepublik einem logistischen Gesetz folgen sollte, ist die Entwicklung auf jeden Fall noch in dem Stadium, in dem das logistische Wachstum praktisch ununterscheidbar vom exponentiellen ist. Als Maximalpopulation ergeben sich knapp 177 Millionen Einwohner, also fast dreimal so viel wie heute. Nun ist aber die Maximalpopulation im logistischen Modell der Quotient aus dem konstanten und den negativ genommenen linearen Koeffizienten der Ausgleichsgerade für die Wachstumsrate in Abhängigkeit von der Bevölkerungszahl, und da der lineare Koeffizient hier extrem klein ist, führen bereits kleinste Fehler dieses Nenners zu riesigen Änderungen des Bruchs; das Ergebnis ist also für alle praktischen Zwecke irrelevant.

***b)* USA:** Hier zeigt Abbildung 19 in der Tat einen deutlichen Abfall der Wachstumsrate bei steigender Bevölkerungszahl; man sollte also eine einigermaßen gute Übereinstimmung der Daten mit einer logistischen Kurve erwarten.

Wie Abbildung 20 zeigt ist dies in der Tat der Fall; die durchgezogene logistische Kurve wurde mit den hier diskutierten Methoden angepaßt, die

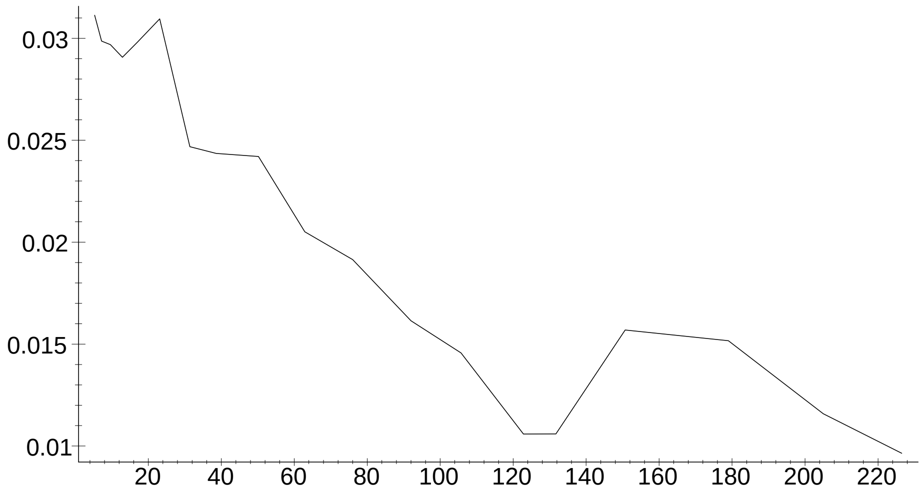


Abb. 19: Wachstumsrate über Bevölkerung für die Vereinigten Staaten

gestrichelte ist eine aufwendiger bestimmte Anpassung von T. ANDERSON. Perfekt ist die Übereinstimmung allerdings mit keiner der beiden Kurven, und ein Blick auf Abbildung 19 legt auch einen Grund dafür nahe: Zwischen den Einwohnerzahlen von etwa 130 Millionen und etwa 150 Millionen steigt die Wachstumsrate plötzlich an, so daß wir eigentlich nicht eine sondern *zwei* logistische Kurven durch die Daten legen sollten.

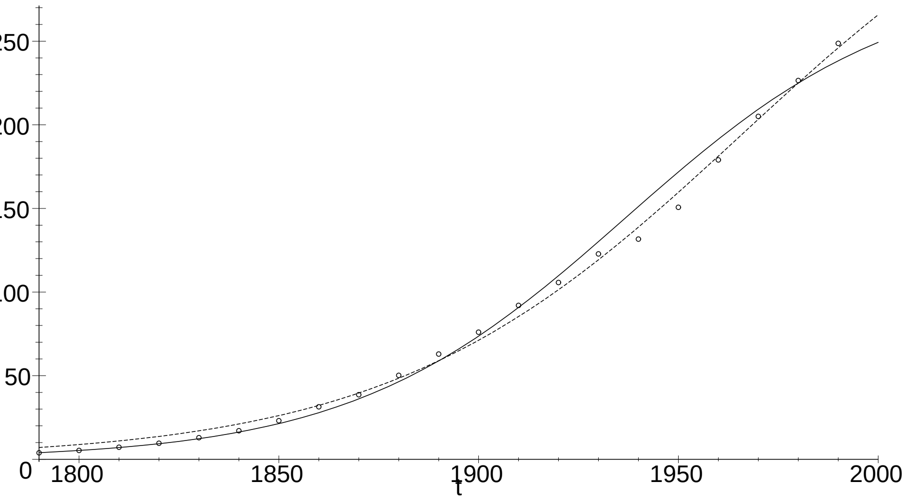


Abb. 20: Logistische Modellierung der amerikanischen Bevölkerungsentwicklung

Ein Blick auf die Tabelle der Einwohnerzahlen oder auch auf Abbildung 2 zeigt, daß 130 Millionen Einwohner im Jahre 1940 erreicht waren; es liegt also nahe, die Daten vor 1940 und die späteren Daten jeweils getrennt zu betrachten.

In der Tat, führt man die Parameteranpassung für die gesamte Zeitreihe durch, ergibt sie in Abbildung 20 eine zwar nicht schlechte, keineswegs aber berauschende Übereinstimmung. Berücksichtigt man dagegen nur die Daten bis 1940, so zeigt die durchgezogene Kurve in Abbildung 21 eine fast ideale Übereinstimmung zwischen theoretischer Kurve und Datenpunkten bis 1940.

Danach sollte man annehmen, daß sich durch die Kriegsjahre 1942–1945 das Bevölkerungswachstum weiter verlangsamte, allerdings ist davon in den Kurven nichts zu sehen, im Gegenteil: Zu sehen ist ein dramatischer *Anstieg* der Wachstumsrate zwischen 1940 und 1960. Der Babyboom nach Ende des zweiten Weltkriegs hatte offensichtlich einen so großen Effekt, daß der Einfluß der Kriegsjahre dadurch weit mehr als kompensiert wurde.

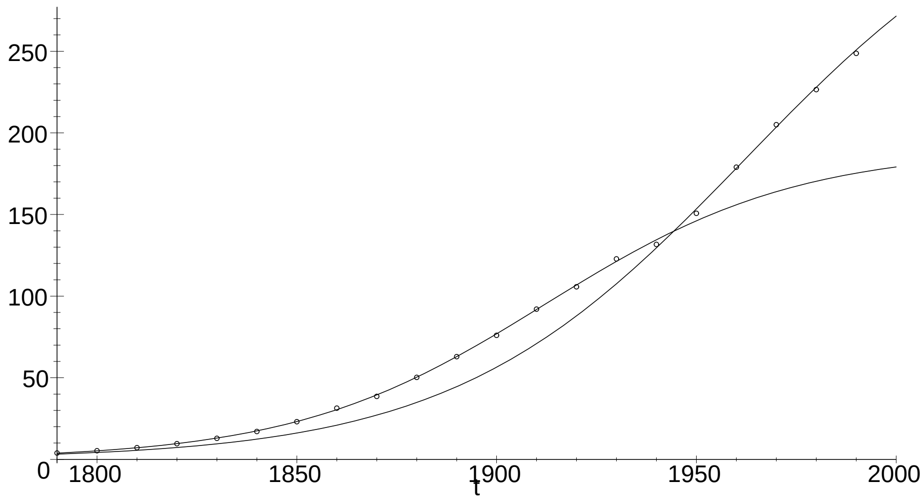


Abb. 21: Bessere logistische Modellierung der amerikanischen Bevölkerungsentwicklung

Eine logarithmische Darstellung der Entwicklung ab 1940 zeigt, daß auch diese wieder eher einem logistischen als einem exponentiellen Wachstumsgesetz genügt; in der Tat stellt die zweite logistische Kurve in Abbildung 21, die aufgrund der Bevölkerungszahlen nach 1940 berechnet wurde, die Entwicklung ab etwa 1960 fast exakt dar.

Das logistische Wachstumsmodell erweist sich daher als sehr gut geeignet zur Modellierung der amerikanischen Bevölkerungszahlen; die einzige demographische Entwicklung, die es nicht voraussagen kann, ist der Babyboom nach dem zweiten Weltkrieg.

Selbst dieser spricht aber nicht unbedingt gegen die Gültigkeit des logistischen Modells: Schließlich gingen die USA aus dem zweiten Weltkrieg als Weltmacht hervor, und da eine Weltmacht immer auch etwas auf Kosten anderer Staaten leben kann, läßt sich der Sprung in der Bevölkerungskurve auch dadurch erklären, daß die Grenzkapazität des Systems USA sich damals in der Tat von 190 auf 367 Millionen fast verdoppelt hat.

c) **Die Weltbevölkerung:** Hier ist die Situation so komplex, daß sie ein eigenes Kapitel verdient hat; zuvor möchte ich zum Abschluß dieses Kapitels noch kurz eingehen auf

4.4 Weitere Beispiele für logistisches Wachstum

Das logistische Wachstum wurde im Gegensatz zur Exponentialfunktion explizit für die Modellierung des Bevölkerungswachstums entwickelt; seine Anwendungen liegen auch heute noch eher in den Sozial- als in den Naturwissenschaften.

Eines der wenigen logistischen Phänomene in den Naturwissenschaften bieten *autokatalytische Reaktionen* in der Chemie, d.h. Reaktionen, bei denen eines der Reaktionsprodukte als Katalysator für die Reaktion dient. Da somit die Reaktionsrate sowohl von der Konzentration des Ausgangsprodukts als auch der des Katalysators, d.h. eines der daraus entstandenen Endprodukte, abhängt, kommt man in natürlicher Weise zu einer logistischen Gleichung.

Ansonsten wurde bereits 1920 erfolgreich für die Modellierung des amerikanischen Bevölkerungswachstums eingesetzt [**PR**]; einer der Autoren der entsprechenden Arbeit fand in seinem Buch [**P**] eine ganze Reihe weiterer Beispiele, durch die das logistische Modell erheblich bekannter wurde als durch die Originalarbeiten von VERHULST.

Eine von Bevölkerungszahlen unabhängige Anwendung fanden [**FP**] bei der Untersuchung von Erneuerungsprozessen, d.h. also bei der Einführung neuer Techniken, Substanzen *usw.* in der Industrie und der Landwirtschaft. Bezeichnet $y(t)$ den Prozentsatz der in Frage kommenden Anwender, die bereits die neue Methode benutzen, so genügt $y(t)$ in einer Vielzahl von Fällen mit erstaunlicher Genauigkeit einer logistischen Gleichung. Da die Kapazitätsgrenze $K = 100\%$ hier bekannt ist, läßt sich das Vorliegen eines logistischen Wachstums leicht überprüfen anhand der Linearität oder Nichtlinearität der Funktion

$$\ln\left|\frac{1-f(t)}{f(t)}\right| ,$$

die in [**FP**] für zahlreiche Beispiele graphisch dargestellt ist. Numerische Daten für explizite Modellierungsbeispiele sind in dieser Arbeit leider nicht zu finden.

Einen Hinweis darauf, daß der quadratische Term in der logistischen Gleichung tatsächlich als Kommunikation oder Kooperation unter den Individuen interpretiert werden kann, findet man in einer Untersuchung von COLEMAN [**Co**], *S. 45,* der die Ärzte in vier Gemeinden des amerikanischen mittleren Westens zunächst in zwei Gruppen einteilte unter dem Gesichtspunkt ihrer *Integration* in die jeweilige medizinische Gemeinschaft: Er ließ sich von jedem Arzt die Namen jener Kollegen nennen, die dieser als persönliche Freunde oder als medizinische Diskussionspartner ansah und bezeichnete einen Arzt dann als integriert *bzw.* nicht integriert, wenn sein Name häufig *bzw.* selten fiel.

Bei der Untersuchung über die Anwendung eines neuen Medikaments zeigte sich dann, daß bei den integrierten Ärzten die Anzahl der Anwender logistisch anstieg, während sie bei den nicht integrierten besser durch eine Differentialgleichung der Form $f'(t) = a - bf(t)$ (mit einer Exponentialfunktion als Lösung) beschrieben werden konnte.

5. Modelle für die Weltbevölkerung

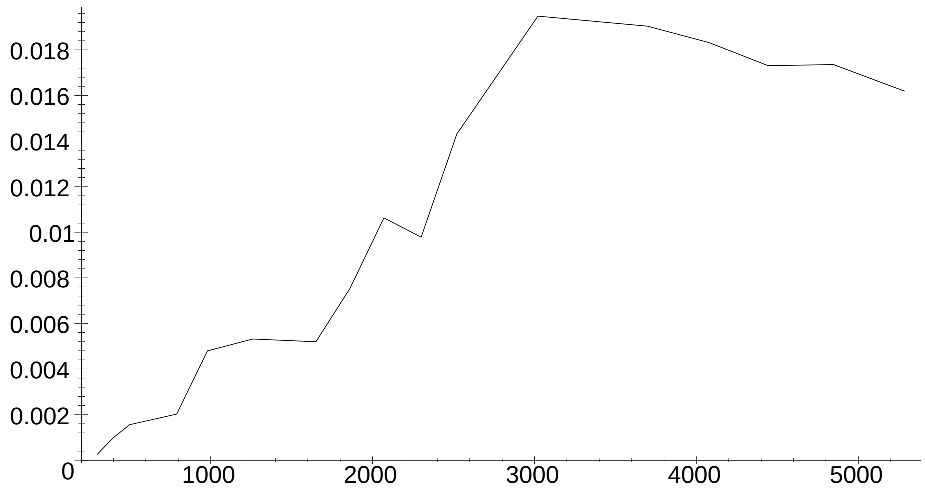


Abb. 22: Wachstumsraten der Welbevölkerung in Abhängigkeit von der Bevölkerungszahl

Der Vergleich von relativen Wachstumsraten mit den Bevölkerungszahlen in Abbildung 22 zeigt, daß man sich für die Modellierung der Weltbevölkerung etwas mehr einfallen lassen muß; daher scheint es gerechtfertigt, diesem Problem ein eigenes Kapitel zu widmen. Trotzdem beginnen wir natürlich mit dem logistischen Wachstum.

5.1 Logistisches Wachstum ab 1960

Die Abhängigkeit der Wachstumsrate von der Bevölkerungszahl in Abbildung 22 ist zwar aufs ganze gesehen definitiv nicht linear: Bis zu einer Bevölkerung von etwa drei Milliarden steigt die Wachstumsrate mit steigender Bevölkerung an, danach sinkt sie. Man kann also nicht erwarten, daß ein globales logistisches Modell eine sonderlich gute Übereinstimmung mit den Daten aufweist, und wir können darauf verzichten, eines zu berechnen.

Für eine Modellierung mit linear variierenden Wachstumsraten muß man nach Abbildung 22 ganz offensichtlich zwei Fälle unterscheiden: Bis zu einer Weltbevölkerung von etwa drei Milliarden stieg die Wachstumsrate (ungefähr) linear mit der Bevölkerung, danach sank sie (ungefähr) linear.

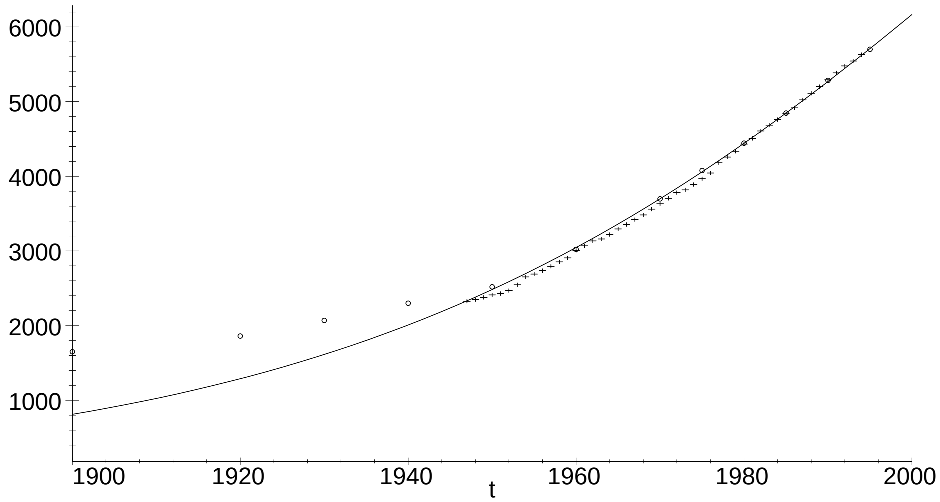


Abb. 23: Modellierung der Weltbevölkerung ab 1960 durch ein logistisches Modell

Ein Blick auf die Tabelle der Weltbevölkerung zeigt, daß eine Bevölkerung von drei Milliarden Menschen etwa im Jahr 1960 erreicht war; trennt man also die Daten bis 1960 von den Daten ab 1960, so sollte man für die Zeit vor 1960 ein „antilogistisches" und ab 1960 ein logistisches Wachstum erwarten. In der Tat zeigt die anhand der Daten ab 1960 berechnete logistische Kurve in Abbildung 23 eine sehr gute Übereinstimmung mit den Daten; selbst die Jahresschätzungen aus Abbildung 6, die hier durch Kreuze dargestellt sind, liegen praktisch alle auf der Kurve. Seit etwa 1960 wächst die Weltbevölkerung also etwa logistisch; die Rechenergebnisse zeigen, daß die Grenzbevölkerung bei etwa 15,6 Milliarden Menschen liegt – mehr, als die Erde nach Ansicht der meisten Experten ernähren kann –, und daß etwa 2017 die halbe Maximalzahl erreicht sein wird.

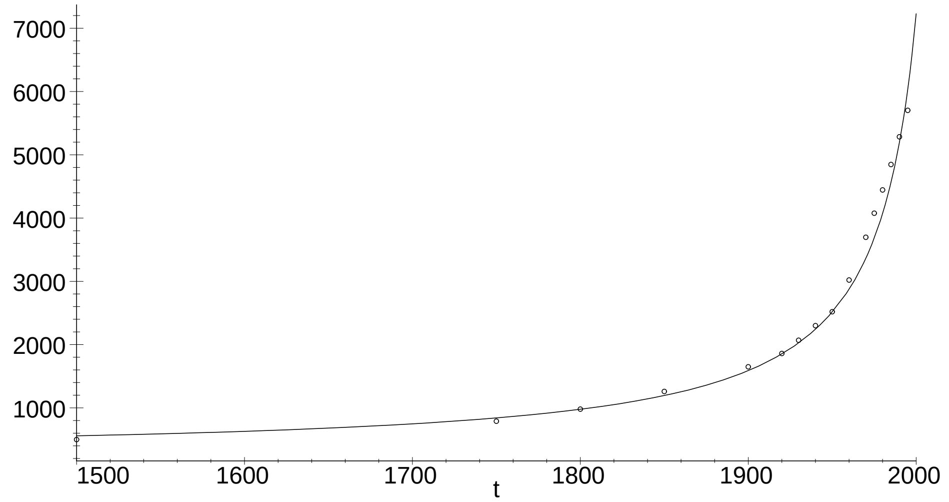


Abb. 24: Modellierung der Weltbevölkerung bis 1960 durch ein „antilogistisches“ Modell

5.2 „Antilogistisches“ Wachstum bis 1960

Vor 1960 legt Abbildung 22 ein „antilogistisches“ Wachstum nahe; genau das ergibt auch die Anpassung der Parameter an die Daten bis 1960. Der Zeitpunkt, zu dem die Weltbevölkerung nach diesem Modell unendlich werden sollte, wird im Jahr 2025, also in etwa dreißig Jahren erreicht. Ab 1960 ist die Übereinstimmung erwartungsgemäß nicht mehr so gut; etwas unterwartet ist vielleicht, daß die Datenpunkte in Abbildung 24 *über* der Kurve liegen, so daß es – vor allem, wenn man nur die Daten bis in die achtziger Jahre betrachtet – scheinen mag, als wachse die Weltbevölkerung noch schneller, als im Modell vorgesehen, so daß auch der Tag, an dem sie unendlich wird, noch früher erreicht werden sollte.

5.3 Das Modell von Foerster, Mora und Amiot

Im Jahre 1960, als die Zeitreihe der Wachstumsraten für die Weltbevölkerung noch klar ansteigend war, suchten auch die Autoren Heinz von Foerster, Patricia M. Mora und Lawrence W. Amiot, allesamt Elektrotechniker an der University of Illinois in Urbana, nach einem Gesetz, um dieses überexponentielle Wachstum zu beschreiben. Sie betrachteten in ihrer Arbeit [**FMA**] jedoch kein „antilogistisches“ Wachstum, sondern ein beschleunigtes Malthussches Wachstum der Form

$$f'(t) = \gamma \cdot f(t)^r \qquad \text{mit } r > 1 \text{ und } \gamma > 0\,.$$

Auch diese Gleichung läßt sich auf ein einfache Integrationsaufgabe zurückführen, wenn wir wieder anstelle von $u = f(t)$ die Umkehrfunktion $t = g(u)$ betrachten. Für diese ist

$$g'(u) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{\gamma \cdot u^r} = \frac{u^{-r}}{\gamma} ,$$

also

$$t = g(u) = \frac{1}{\gamma}\frac{u^{1-r}}{1-r} + C .$$

Auflösen nach u^{1-r} führt auf

$$u^{1-r} = \gamma \cdot (1-r) \cdot (t-C) \quad \text{oder} \quad u^{r-1} = \frac{1}{\gamma \cdot (r-1) \cdot (C-t)} ,$$

wobei die zweite Form vorzuziehen ist, denn $r-1$ ist positiv. Also ist

$$u = f(t) = \frac{1}{\big(\gamma \cdot (r-1)\big)^{\frac{1}{1-r}}} \cdot \frac{1}{(C-t)^{\frac{1}{r-1}}} = \frac{\beta}{(C-t)^s}$$

mit

$$\beta = \frac{1}{\big(\gamma \cdot (r-1)\big)^{\frac{1}{r-1}}} \quad \text{und} \quad s = \frac{1}{r-1} > 0 .$$

Die Integrationskonstante C kann auch hier wieder aus dem Anfangswert für die Zeit $t = 0$ berechnet werden, viel interessanter ist es aber, die Zeit $t = C$ zu betrachten: Wie beim „antilogistischen“ Wachstum ist dies der Zeitpunkt, zu dem die Weltbevölkerung unendlich wird.

Wie weit ist es noch bis zum Zeitpunkt $t = C$? Die beste Übereinstimmung mit den ihnen bekannten Daten zur Bevölkerungsentwicklung erhielten die Autoren, bei geeignete Gewichtung der Daten, für

$$\begin{aligned} \beta &= (179 \pm 14) \cdot 10^9 \\ s &= 0,990 \pm 0,009 \\ C &= 2026,87 \pm 5,5 \text{ Jahre} \\ r &= 2,01 \pm 0,009 ; \end{aligned}$$

die Menschheit wächst also ungefähr nach dem Wachstumsgesetz

$$f'(t) = \gamma \cdot f(t)^2 ,$$

das man auch als Spezialfall der antilogistischen Gleichung betrachten kann; es ist also kein Wunder, daß auch der Zeitpunkt der Katastrophe bei beiden Modellen einigermaßen übereinstimmt.

Der Zeitpunkt, zu dem die Menschheit unendlich wird, kann noch etwas genauer datiert werden (soweit das bei einer Fehlertoleranz von fünfeinhalb Jahren sinnvoll ist): $0,87$ Jahre sind $317,55$ Tage, und $0,55$ Tage sind $13,2$ Stunden; die Katastrophe passiert also gegen 13^{12} Uhr am 317. Tag des Jahres 2026. Dieser Tag liegt offensichtlich im November; da es bis einschließlich Oktober fünf Monate mit 31 und einen mit 28 Tagen gibt, haben Januar bis Oktober zusammen 303 Tage, der 317. Tag des Jahres ist also der 13. November. Wenn wir im Kalender des Jahres 2026 nachschauen, sehen wir, daß dies ein Freitag ist; falls das hier betrachtete Modell richtig ist, wird dieser Freitag der dreizehnte also wirklich ein Unglückstag sein, und dementsprechend hat [**FMA**] auch den Titel *„Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026"*.

Wie realistisch ist dieses Modell? Natürlich kann man praktisch sicher sein, daß die Autoren die Gewichte so manipulierten, daß ein Freitag, der Dreizehnte um 13^{13} Uhr herauskam (durch Rundung von C auf nur zwei Dezimalstellen wurde dann doch 13^{12} daraus), aber dies dürfte wohl nur zu kleineren Änderungen geführt haben, die nichts am Prinzip ändern.

Jedenfalls stimmen die Bevölkerungszahlen bis 1960 sehr gut mit den Werten von $f(t)$ überein; bei der graphischen Darstellung in [**FMA**] sieht man kaum Abweichungen. Mehr noch: Selbst wenn man sich auf noch ältere Bevölkerungszahlen beschränkt, kommt man auf ungefähr die gleichen Zahlen: Ein Wissenschaftler zur Zeit Karls des Großen hätte mit der hier dargestellten Theorie und den (ihm sicherlich unbekannten) Bevölkerungszahlen bis hin zu seiner Zeit ein ähnliches C mit einer Genauigkeit von ± 150 Jahren berechnen können. Zur Zeit von Elisabeth I. schrumpfte die Ungewißheit auf ± 55 Jahre, und zur Zeit Napoleons schließlich hätte man aufgrund der Bevölkerungszahlen bis zur damaligen Zeit die Genauigkeit auf ± 15 Jahre steigern können und damit voraussagen, daß die Weltbevölkerung im Jahr 1997 noch endlich ist.

Hier, in Abbildung 25, ist die Übereinstimmung auch bei den Daten bis 1960 nicht ganz so gut, aber das dürfte wohl einfach daran liegen, daß die Autoren andere und anders gewichtete Schätzungen verwendeten.

Auch in neueren Büchern zur mathematischen Modellierung wird dieses Modell noch gelegentlich genannt, zusammen mit dem Hinweis, daß die neueren Bevölkerungszahlen tatsächlich sogar *schneller* steigen als die Gleichung vorsieht, so daß das Ende näher ist als erst 2026. Aber daß

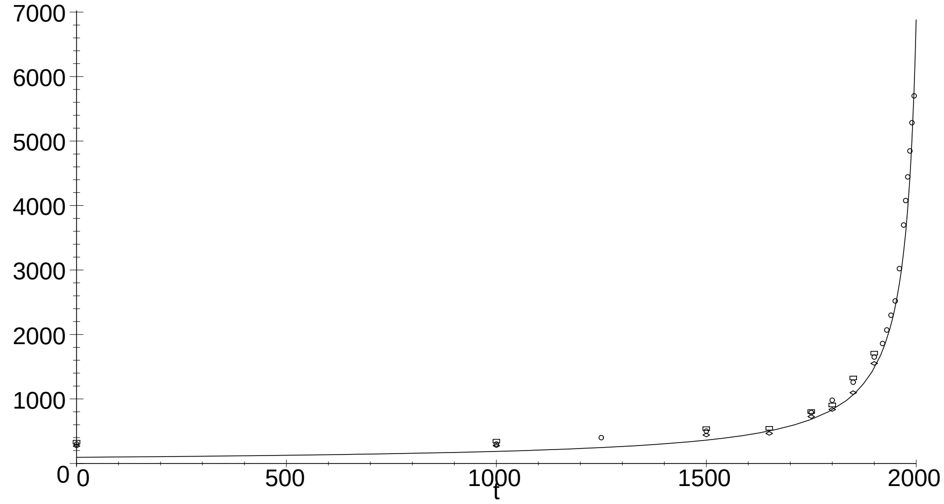


Abb. 25: Das Wachstumsmodell von **[FMA]**

das ein Trugschluß ist, haben wir ja bereits beim „antilogistischen“ Wachstum gesehen.

5.4 Logistische Modifikation des obigen Modells

Genau wie wir zum logistischen Wachstum geführt wurden, da das MALTHUSsche Wachstum nicht unbegrenzt andauern kann, können wir auch das Modell des vorigen Abschnitt so modifizieren, daß es sein unrealistisches Explosionsverhalten verliert.

Wie wir gesehen haben, läßt sich das Wachstum der Weltbevölkerung recht gut beschreiben durch eine Differentialgleichung der Art

$$f'(t) = \gamma \cdot f(t)^2$$

(die minimale Abweichung des optimalen Exponenten von der zwei sei der Einfachheit halber vernachlässigt); als logistische Variante davon bietet sich die Gleichung

$$f'(t) = \gamma \cdot f(t)^2 \cdot \left(1 - \frac{f(t)}{K}\right)$$

an, wobei K die maximale Bevölkerungszahl ist, die die Erde verkraften kann.

Ausmultipliziert führt dies auf eine Gleichung der Form

$$f'(t) = \alpha f(t)^3 + \beta f(t)^2 ,$$

die im Prinzip wie die logistische Gleichung integriert werden kann. Allerdings ist einerseits die Partialbruchzerlegung hier bereits etwas aufwendiger, und die berechnete (etwas längliche) Umkehrfunktion läßt sich auch nicht mehr explizit nach $f(t)$ auflösen, so daß hier darauf verzichtet sei. Stattdessen möchte ich einfach die Parameter α und β schätzen aufgrund der Beziehung

$$\frac{f'(f)}{f(t)^2} = \alpha f(t) + \beta \,,$$

die wieder auf eine lineare Regression führt, und die Differentialgleichung dann numerisch lösen mit den Anfangsbedingungen zum Jahr 1990, für das inzwischen wohl einigermaßen stabile Zahlen vorliegen dürften. Das Ergebnis ist in Abbildung 26 zu sehen.

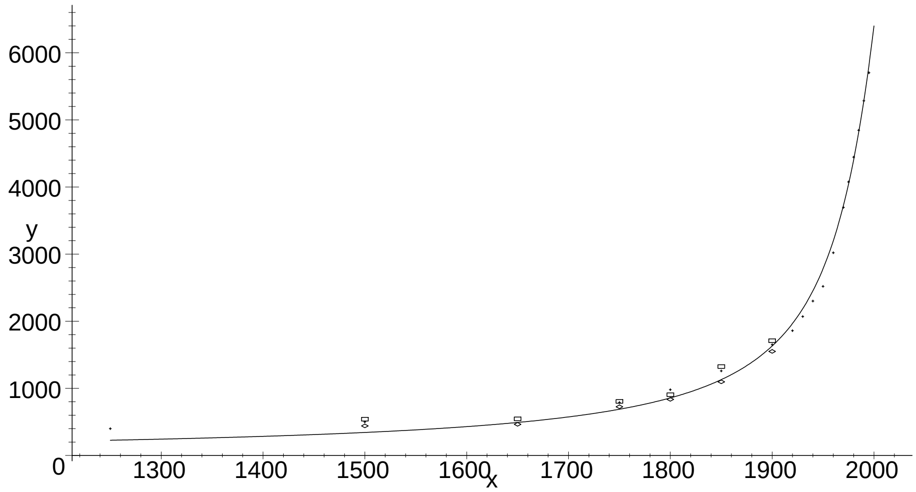


Abb. 26: Logistische Modifikation des Wachstumsmodells von **[FMA]**

Die Grenzkapazität des Modells aufgrund der hier geschätzten Parameter ergibt sich zu 12,7 Milliarden, ein Wert, der einigermaßen mit der hohen Variante der UN-Bevölkerungsschätzung kompatibel ist.

5.5 Strukturelle Instabilität beim Übergang zwischen logistischem und „antilogistischem“ Wachstum

Die Entscheidung zwischen einem Modell mit einer sich stabilisierenden Weltbevölkerung und einem Modell mit einer in (sehr) endlicher Zeit explodierenden hängt also offensichtlich sehr davon ab, welche Daten man betrachtet. Zur Illustration möchte ich hier das logistische *bzw.* „antilogistische“ Modell betrachten und dessen Parameter schätzen anhand der Daten ab einem gewissen Anfangsjahr. Die Ergebnisse für die Parameter α

Jahr	0	1000	1500	1750	1850	1900
α	$-4 \cdot 10^{-6}$	$-4 \cdot 10^{-6}$	$-4 \cdot 10^{-6}$	$-4 \cdot 10^{-6}$	$-4 \cdot 10^{-6}$	$-3 \cdot 10^{-6}$
t_0	1934	1996	2025	2033	2037	2043
Jahr	1920	1930	1940	1950	1960	1970
α	$-3 \cdot 10^{-6}$	$-2 \cdot 10^{-6}$	$-6 \cdot 10^{-7}$	$+1 \cdot 10^{-6}$	$+2 \cdot 10^{-6}$	$+1 \cdot 10^{-6}$
t_0	2049	2055	2104	2026	2017	2030

und t_0 sind in der obenstehenden Tabelle in Abhängigkeit vom Anfangsjahr zusammengefaßt.

Wie man sieht, variieren alle drei Parameter recht kontinuierlich – eigentlich ein Ergebis, daß unser Vertrauen in die Modellierung mit unsicheren Daten festigen sollte.

Leider hat aber t_0 je nach Vorzeichen von α zwei völlig verschiedene Bedeutungen: Für $\alpha > 0$ ist es der Zeitpunkt, zu dem die Weltbevölkerung unendlich groß geworden ist, für $\alpha < 0$ dagegen der Zeitpunkt, zu dem sie ihre halbe Maximalgröße erreicht hat. (Für $\alpha = 0$ haben wir ein exponentielles Wachstum, bei dem t_0 zwar in den Vorfaktor eingeht, als Zeitpunkt aber keine ausgezeichnete Bedeutung hat.)

Damit ist klar, daß auch ein relativ kleiner Fehler bei der Berechnung von α zu dramatischen Änderungen nicht nur im Langzeitverhalten, sondern sogar für die Bevölkerungsentwicklung der nächsten dreißig Jahre führt. Angesichts der relativ unsicheren Datenlage sind Voraussagen aufgrund des logistischen/„antilogistischen“ Modells derzeit also sehr problematisch.

5.6 Ein einheitliches Wachstumsmodell für die Weltbevölkerung

Wie bei den Bevölkerungsdaten der alten Bundesrepublik und denen der USA sind wir auch bei der Weltbevölkerung zu dem Schluß gekommen, daß wir zwei verschiedene Zeitintervalle mit zwei verschiedenen Wachstumsfunktionen brauchen.

Im Falle der Bundesrepublik war es der „Pillenknick“, der das Wachstumsverhalten deutlich änderte, im Falle der USA dagegen der „Babyboom“ – beides Phänomene, die nicht als Reaktion auf Bevölkerungszahlen eintraten und die daher jenseits der Möglichkeiten einer dynamischen Modellierung mit autonomen Wachstumsmodellen liegen.

Für die Weltbevölkerung dagegen gibt es keinen ähnlich einsichtigen Grund, warum sich um ca. 1960 etwas geändert haben sollte: Zwar begannen damals in einigen Ländern Programme zur Kontrolle des Bevölkerungswachstums, aber deren Effekt war im Weltmaßstab wohl doch nicht so dramatisch. Da außerdem der Bevölkerungskurve keine Trendänderung anzusehen ist und wir uns stattdessen auf die numerisch recht dubiose Kurve der Änderungsraten beziehen müssen, kennen wir nicht einmal den genauen Zeitpunkt der Trendumkehr, ab dem die Wachstumsraten fallen statt anzusteigen.

Viel besser wäre es daher, ein einziges Modell zu finden, das die Änderung der Wachstumsrate mit einbezieht: Anstelle einer *linearen* Abhängigkeit der Wachstumsrate vom Bevölkerungswachstum, wie sie das logistische (und das „antilogistische") Modell postuliert, müssen wir eine funktionale Abhängigkeit finden, die den tatsächlichen Daten besser angepaßt ist.

Die einfachste Kurve, die zunächst ansteigt und dann abfällt, ist die Parabel. Abbildung 22 sieht zwar nicht sehr danach aus, aber schließlich waren wir auch schon erfolgreich mit Modellierungen, die äußerst seltsame Kurven als Geraden aufgefaßt haben. Die Koeffizienten der Parabel lassen sich natürlich problemlos nach der Methode der kleinsten Quadrate ermitteln; eine anschauliche graphische Alternative gibt es leider nicht mehr.

Eine quadratische Abhängigkeit der relativen Wachstumsrate von der Bevölkerungszahl führt auf die Gleichung

$$\frac{y'}{y} = ay^2 + by + c \quad \text{oder} \quad y' = ay^3 + by^2 + cy\,.$$

Zumindest vom Ansatz her läßt sich diese Gleichung wie die logistische lösen; allerdings erfordert die Partialbruchzerlegung die Lösung eines linearen Gleichungssystems in drei Veränderlichen und die daraus erhaltene Umkehrfunktion $t = h(y)$ läßt sich nicht mehr explizit nach y auflösen.

Aus diesem Grund will mich hier mit einer numerischen Lösung der Gleichung begnügen und die Integrationskonstante einfach so wählen, daß *einer* der betrachteten Datenpunkte auf der Kurve liegt; das Ergebnis ist in Abbildung 27 dargestellt.

Angesichts der sehr wenigen Annahmen, die wir gemacht haben, um ein so komplexes Problem wie das Wachstum der Weltbevölkerung zu beschreiben, ist die Übereinstimmung mit den Daten ausgezeichnet; wir sollten uns die Differentialgleichung also etwas genauer ansehen.

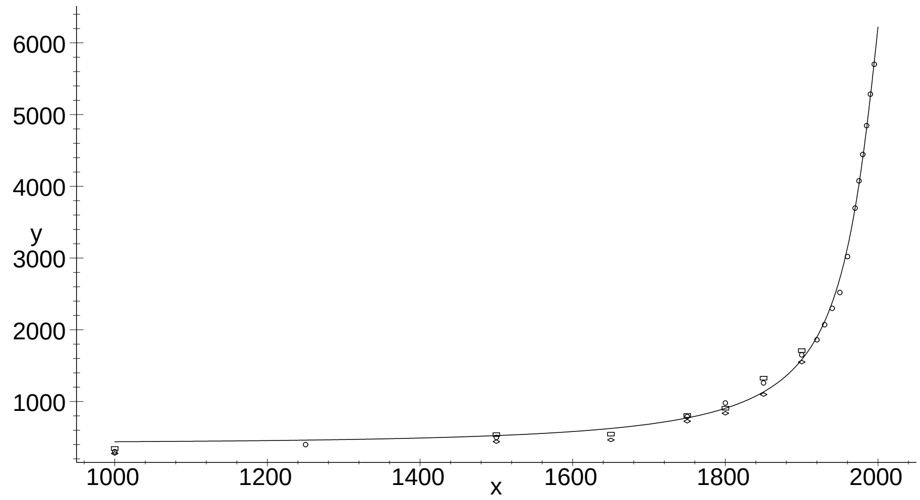


Abb. 27: Modellierung der Weltbevölkerung durch ein verallgemeinertes logistisches Modell

Wenn wir die rechte Seite in Linearfaktoren zerlegen, können wir sie auch (ungefähr) in der Form

$$y' = -10^{-9} y(y - 425)(y - 9086)$$

schreiben; y' ist also Null für $y = 0$, dann negativ für $0 < y < 425$, positiv für $425 < y < 9086$ und negativ für $y > 9086$. Von den drei Gleichgewichtslösungen sind also $y = 0$ und $y \approx 9086$ stabil, $y \approx 425$ aber instabil, wie es auch das Vektorfeld in Abbildung 28 zeigt.

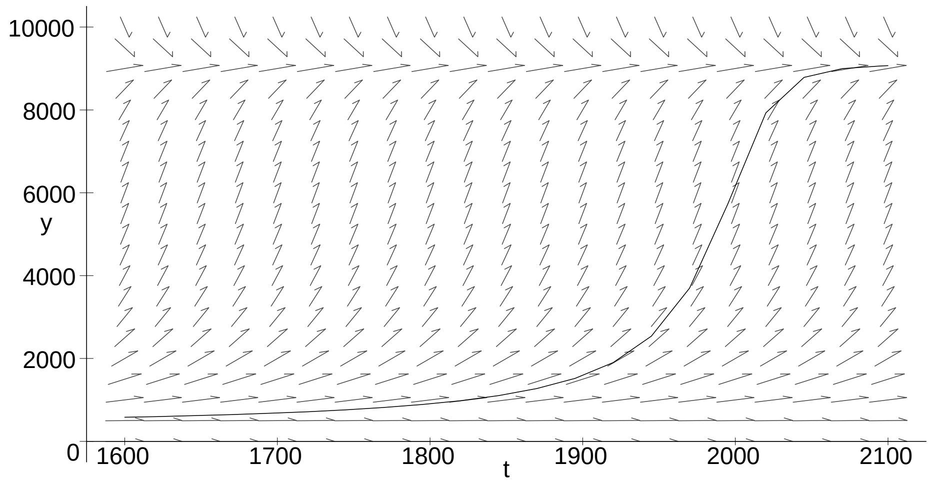


Abb. 28: Vektorfeld und Langzeitverhalten der verallgemeinerten logistischen Gleichung

Die instabile Gleichgewichtslösung $y \approx 425$ ist das wesentliche neue Phänomen gegenüber der logistischen Gleichung: Sinkt die Bevölkerungsstärke unter diesen Wert, muß die Bevölkerung aussterben. In der Biologie redet man im Zusammenhang mit dieser Lösung gelegentlich vom sogenannten *predator pit,* der „Raubtierfalle“ also, da eine zu kleine Population sich weniger gut gegen Raubtiere schützen kann. Hinzu kommen Schwierigkeiten bei der Partnersuche, das Problem der genetischen Degeneration durch Inzucht und so weiter; die Existenz einer solchen instabilen Gleichgewichtslösung spricht also durchaus nicht gegen dieses Modell. Allerdings erscheint eine Mindestbevölkerung von 425 Millionen Menschen deutlich zu hoch: Diese Zahl war nach keiner der vorliegenden Schätzungen im Jahre Null erreicht, und wir sind trotzdem nicht ausgestorben.

Am anderen Ende, bei der stabilen Lösung $y \approx 9086$ dagegen liegt das Modell nur kann unter der Bevölkerungszahl, bei der sich die Weltbevölkerung nach der mittleren Variante der neuesten UN-Schätzung gegen 2100 stabilisieren wird, die Kurve in Abbildung 28 stimmt hier also sehr gut mit den (erheblich aufwendigeren) Schätzungen der Vereinten Nationen überein.

6. Bemerkungen zur Maximum Likelihood Methode

In den obigen Beispielen hatten wir die Parameter eines Wachstumsgesetzes meist einfach dadurch bestimmt, daß wir eine Ausgleichsgerade durch geeignet gewählte Datenpunkte legten. In diesem Abschnitt möchte ich kurz darauf eingehen, worin die grundsätzliche Rechtfertigung solcher Methoden liegt, und wo wir diese überstrapaziert haben.

Wir sind jeweils davon ausgegangen, daß die grundsätzliche Form des Wachstumsgesetzes (exponentiell, logistisch, … vorgegeben ist und wir „nur“ noch die in diesem Gesetz vorkommenden Parameter bestimmen müssen.

Der Ansatz dazu ist folgender: Sei $u = f(a, b, \dots; t)$ der von den Parametern $a, b, \dots$ abhängige Zusammenhang zwischen den Größen t und u, und seien $(t_1, u_1), \dots, (t_n, u_n)$ gegebene (Meß-)Werte, an die die Parameter angepaßt werden sollen.

Nehmen wir an, es gäbe Parameter $a, b, \dots$, für die $u = f(a, b, \dots; t)$ den exakten Zusammenhang zwischen den Größen u und t wiedergibt, daß aber die Werte u_i aufgrund von Beobachtungsfehlern von den $f(a, b, \dots; t_i)$ abweichen – das ist genau die Situation, mit der man es in den Naturwissenschaften meist zu tun hat, und wenn wir geschichtliche, politsche *usw.* Einflüsse weiterhin ignorieren (oder – schlimmer noch? – als zufällig betrachten), ist es auch die hier vorliegende Situation.

6.1 Das Laplacesche Fehlermodell

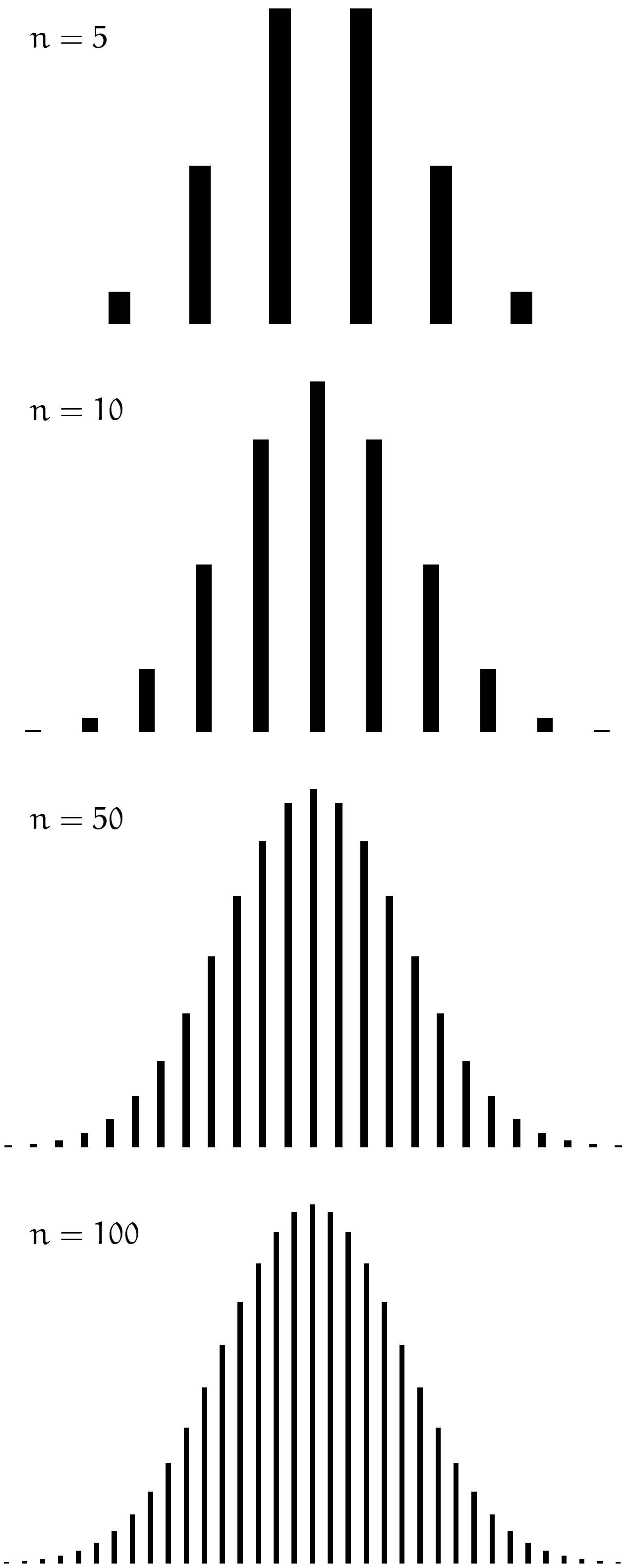
Angenommen, der Fehler kommt durch n verschiedene Störungen zustande, wobei jede dieser Störungen den gleichen Betrag ε habe und mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder $+\varepsilon$ oder $-\varepsilon$ sei; der Gesamtfehler u sei die Summe aller dieser Störungen. Was wissen wir dann über u? Im Falle $n = 0$ ist natürlich $u = 0$, für $n = 1$ ist $u = +\varepsilon$ oder $u = -\varepsilon$ mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit; für $n = 2$ sind in jeweils einem der vier Fälle beide Störungen positiv oder beide Störungen negativ, also $u = \pm 2\varepsilon$; in den restlichen beiden Fällen heben sich die beiden Störungen auf, d.h. $u = 0$. Entsprechend ist für $n = 3$ in jeweils einem der acht möglichen Fälle $u = \pm 3\varepsilon$, und in jeweils drei Fällen ist $u = \pm\varepsilon$ *usw.* Insgesamt erhalten wir also die untern abgedruckte Tabelle für die Anzahl der Fälle, in denen der oben angegebene Fehler u auftritt.

$u =$	-5ε	-4ε	-3ε	-2ε	$-\varepsilon$	0	$+\varepsilon$	$+2\varepsilon$	$+3\varepsilon$	$+4\varepsilon$	$+5\varepsilon$
$n = 0$						0					
$n = 1$					1		1				
$n = 2$				1		2		1			
$n = 3$			1		3		3		1		
$n = 4$		1		4		6		4		1	
$n = 5$	1		5		10		10		5		1

Diese dreiecksförmige Anordnung von Zahlen ist offensichtlich gerade das Pascal*sche Dreieck.* Man kann es bekanntlich dadurch berechnen, daß man an jede Stelle genau die Zahl schreibt, die die Summe der beiden links und rechts darüberstehenden ist: Die n-te Störung bringt den Fehler genau dann auf $i \cdot \varepsilon$, wenn sie entweder gleich $+\varepsilon$ ist und die ersten $n - 1$ Störungen einen Fehler $(i - 1) \cdot \varepsilon$ produziert haben, oder aber wenn sie gleich $-\varepsilon$ ist und die ersten $n-1$ Störungen einen Fehler $(i+1) \cdot \varepsilon$ produziert haben. Entsprechend ist auch klar, daß die Summe aller Zahlen in der n-ten Zeile gleich 2^n ist, denn in der nullten Zeile haben wir Summe eins, und da die jeweils neu hinzukommende Störung genau zwei Möglichkeiten hat, verdoppelt sich die Summe von Zeile zu Zeile. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich n Störungen zu $i \cdot \epsilon$ aufsummieren, ist also gerade gleich der Zahl, die in der n-ten Spalte unter $i \cdot \varepsilon$ steht (beziehungsweise Null, wenn dort keine Zahl steht), dividiert durch 2^n.

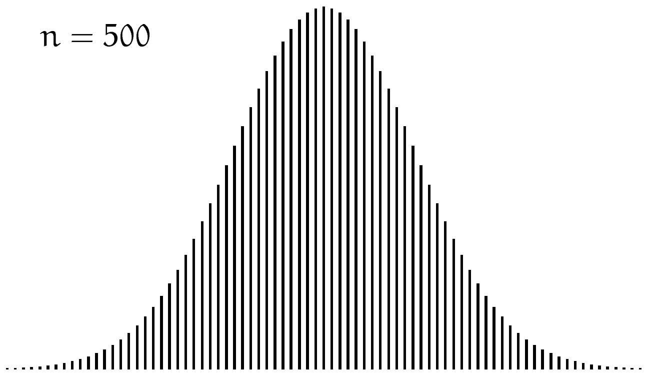
Wenn wir nun n immer größer werden lassen und ε dementsprechend immer kleiner, so nähern sich die so berechneten Wahrscheinlichkeiten, wie die folgenden Abbildungen zeigen, immer mehr einer kontinuierlichen Kurve:

Dies läßt sich auch mit vertretbarem Aufwand analytisch herleiten:

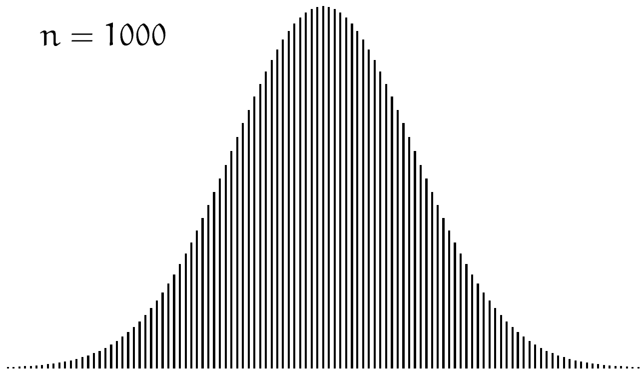


Wir schreiben die Einträge im PASCALschen Zahlendreick wie üblich als

$n = 500$



$n = 1000$



Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

und suchen den Grenzwert von

$$\binom{n}{k} 2^{-n-1} \frac{\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{n!}{k!(n-k)!} 2^{-n-1} \frac{\sqrt{n}}{\sigma}$$

für $n \to \infty$ und konstantes

$$u = (n-2k)\varepsilon = \frac{(n-2k)\sigma}{\sqrt{n}} \, .$$

Nach der STIRLINGschen Formel, die übrigens genau für diese Rechnung erstmalig aufgestellt wurde, ist

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} &\approx \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k}\, (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)} \sqrt{2\pi(n-k)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n^n}{k^k\, (n-k)^{n-k}} \sqrt{\frac{n}{k \cdot (n-k)}} \, . \end{aligned}$$

Dabei ist wegen obiger Beziehung

$$k = \frac{n}{2} - \frac{u\sqrt{n}}{2\sigma}\,.$$

Setzen wir zur Vereinfachung der Schreibweise

$$m = \frac{n}{2}, \quad \nu = \frac{u}{2\sigma} \quad \text{und} \quad \ell = \sqrt{2m}\cdot\nu\,,$$

so ist also

$$k = m - \sqrt{2m}\cdot\nu = m - \ell \quad \text{und} \quad n - k = m + \sqrt{2m}\cdot\nu = m + \ell\,,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{k} 2^{-n-1}\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\\
&\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{n^n}{k^k\,(n-k)^{n-k}}\sqrt{\frac{n}{k\cdot(n-k)}}2^{-n-1}\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{n^n\cdot 2^{-n}}{k^k\,(n-k)^{n-k}}\frac{n\cdot 2^{-1}}{\sqrt{k\cdot(n-k)}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{(2m)^{2m}\cdot 2^{-2m}}{(m-\ell)^{m-\ell}(m+\ell)^{m+\ell}}\frac{2m\cdot 2^{-1}}{\sqrt{(m-\ell)(m+\ell)}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{m^{2m}}{(m-\ell)^m(m+\ell)^m}\left(\frac{m-\ell}{m+\ell}\right)^{\ell}\frac{m}{\sqrt{m^2-\ell^2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{m^{2m}}{(m^2-\ell^2)^m}\left(\frac{m-\ell}{m+\ell}\right)^{\ell}\frac{m}{\sqrt{m^2-\ell^2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{\left(1-\frac{\ell^2}{m^2}\right)^m}\left(\frac{1-\ell/m}{1+\ell/m}\right)^{\ell}\frac{1}{\sqrt{1-\ell^2/m^2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{\left(1-\frac{2\nu^2}{m}\right)^m}\left(\frac{1-\sqrt{2/m}\cdot\nu}{1+\sqrt{2/m}\cdot\nu}\right)^{\sqrt{2m}\cdot\nu}\frac{1}{\sqrt{1-2\nu^2/m}}\,.
\end{aligned}$$

Nun können wir langsam daran denken, n (und damit auch m) gegen unendlich gehen zu lassen; wir verwenden dazu die Beziehung

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\,.$$

Danach ist insbesondere

$$\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{2\nu^2}{m}\right)^m = e^{-2\nu^2}$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\left(1\pm\sqrt{\frac{2}{m}}\cdot\nu\right)^{\sqrt{2m}\cdot\nu} &= \lim_{m\to\infty}\left(1\pm\frac{\sqrt{2}\cdot\nu}{\sqrt{m}}\right)^{\sqrt{m}\cdot\sqrt{2}\cdot\nu}\\ = \lim_{q\to\infty}\left(1\pm\frac{\sqrt{2}\cdot\nu}{q}\right)^{q\cdot\sqrt{2}\cdot\nu} &= \left(e^{\pm\sqrt{2}\cdot\nu}\right)^{\sqrt{2}\cdot\nu} = e^{\pm 2\nu^2}\ ,\end{aligned}$$

denn es bleibt sich natürlich gleich, ob m oder $q=\sqrt{m}$ gegen unendlich geht. Da der Term ν^2/m gegen null geht, erhalten wir somit als Grenzwert des gesamten obigen Ausdrucks

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\frac{1}{e^{-2\nu^2}}\cdot\frac{e^{-2\nu^2}}{e^{+2\nu^2}}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-2\nu^2}\ .$$

Beachten wir nun noch, daß $\nu = u/2\sigma$ und $u = x - a$ war, erhalten wir als Endergebnis den oben angegebenen Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-u^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\ .$$

6.2 Maximum Likelihood Schätzungen

Nach unserem Fehlermodell aus dem letzten Paragraphen sollte also der Wert u_i aus einer Normalverteilung mit Mittelwert $f(a,b,\ldots;t_i)$ kommen, deren Standardabweichung σ_i von der Genauigkeit abhängt, mit der u_i bestimmt werden kann. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß u_i zwischen zwei Werten a und b liegt, ist damit

$$\int_a^b e^{-\left(u - f(a,b,\ldots;\,t_i)\right)^2/2\sigma_i}\ .$$

Von der Wahrscheinlichkeit, daß u_i gleich einem Wert c ist, können wir natürlich nicht reden, da diese nach obiger Formel ein Integral von c nach c wäre, also Null. Aber die Wahrscheinlichkeit dafür, daß u_i in einem kleinen

Intervall vorgegebener Länge um c liegt, ist proportional zum Wert des Integranden an der Stelle c, also zu

$$e^{-\left(c - f(a,b,\ldots;\, t_i)\right)^2/2\sigma_i}\,.$$

Entsprechend ist

$$e^{-\left(d - f(a,b,\ldots;\, t_j)\right)^2/2\sigma_j}$$

ein Maß für die Wahrscheinlichkeit dafür, daß u_j in der Umgebung von d liegt. Wenn wir wie üblich davon ausgehen, daß keine systematischen Fehler auftreten, sind die Fehler von u_i und u_j voneinander unabhängig, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß u_i in der Umgebung von c liegt und u_j in der Umgebung von d ist also proportional zum Produkt der beiden obigen Ausdrücke, also zu

$$e^{-\left(c - f(a,b,\ldots;\, t_i)\right)^2/2\sigma_i - \left(d - f(a,b,\ldots;\, t_j)\right)^2/2\sigma_j}\,.$$

Als Maß für die Güte einer Wahl der Parameter $a, b, \ldots$ können wir daher die Größe

$$L(a,b,\ldots) = e^{\sum_{i=1}^{n} \left(u_i - f(a,b,\ldots;\, t_i)\right)^2/2\sigma_i}$$

definieren, die zwar keine Wahrscheinlichkeit ist, aber doch eng zusammenhängt mit der Wahrscheinlichkeit, daß die Meßreihe eine (fehlerbehaftete) Messung von Größen (t, u) ist, die der Beziehung $u = f(a, b, \ldots)$ genügen. $L(a, b, \ldots)$ heißt *Likelihoodfunktion* nach dem englischen Wort germanischen Ursprungs für Wahrscheinlichkeit. Dieses tritt in der Mathematik nur in diesem Zusammenhang auf; ansonsten wird in der englischsprachigen Mathematik das romanische Wort *probability* für Wahrscheinlichkeit benutzt.

Die Maximum Likelihood Methode besteht nun genau in dem, was ihr Name besagt: *Man wähle die Parameter* $a, b, \ldots$ *so, daß die Likelihoodfunktion maximal wird.*

Da $L(a, b, \ldots)$ durch eine Exponentialfunktion beschrieben wird, wird die Likelihoodfunktion genau dann maximal, wenn ihr Exponent maximal wird. Dieser Exponent ist eine negative Zahl, wird also genau dann maximal, wenn sein Betrag *minimal* wird, das heißt, wenn die Quadratsumme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(u_i - f(a,b,\ldots;\, t_i)\right)^2}{2\sigma_i}$$

minimal wird. Man spricht daher auch häufig von der *Methode der kleinsten Quadrate;* sie geht, wie auch die Normalverteilung, auf CARL FRIEDRICH GAUSS zurück.

In vielen Fällen wird die Zuverlässigkeit der einzelnen Paare (t_i, u_i) miteinander vergleichbar sein, so daß alle σ_i gleich sind; in diesem Fall kann man die σ_i ignorieren und einfach die Quadratsumme

$$\sum_{i=1}^{n} \big(u_i - f(a, b, \ldots; t_i)\big)^2$$

minimieren. Es gibt aber auch Anwendungen, bei denen die Verschiedenheit der σ_i sehr wesentlich ist: Bei der Modellierung des Wachstums der Weltbevölkerung etwa wird man eher von konstanten relativen als von konstanten absoluten Fehlerschranken ausgehen (in den älteren Ausgaben des *Demographic Yearbooks* ist von etwa 5% die Rede), und man wird bei den Schätzwerten für die Zeit vor 1900 sicherlich von größeren relativen Fehlern ausgehen als bei denen für die letzten Jahre.

Zusätzlich muß man auch noch beachten, daß wir für die neuere Zeit sehr viele Werte haben, während es nur wenige Schätzzahlen für die Zeit bis 1900 gibt; eigentlich sollte man diese daher mit einem größeren Gewicht berücksichtigen als die späteren Daten, da sich die Anpassung sonst praktisch ausschließlich an den neueren Daten orientiert. Mit der Wahl solcher Gewichte sind natürlich beträchtliche Manipulationsmöglichkeiten verbunden; insbesondere läßt sich bei der gesamten Zeitreihe der Weltbevölkerungszahlen damit leicht ein logistisches Wachstum in ein antilogistisches überführen und umgekehrt, ohne daß sich an den Gewichten und deren Plausibilität viel ändert.

Bevor wir die Maximum Likelihood Methode wirklich anwenden können, müssen wir uns noch überlegen, wie man die Parameterwerte $a, b, \ldots$ findet, für die die Likelihoodfunktion maximal *bzw.* die Quadratsumme minimal wird. Wenn die (differenzierbare) Funktion $F(x, y, \ldots, z)$ im Punkt $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ ein Maximum oder Minimum hat, müssen dort alle partiellen Ableitungen verschwinden:

$$F_x(x_0, y_0, \ldots, z_0) = F_y(x_0, y_0, \ldots, z_0) = \cdots = F_z(x_0, y_0, \ldots, z_0)\,.$$

Der Grund ist ebenso einfach wie im Fall einer Veränderlichen: Falls etwa $F_x(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ von Null verschieden ist, so ist für kleine Werte von h

$$F(x_0 + h, y_0, \ldots, z_0) \approx F(x_0, y_0, \ldots, z_0) + h \cdot F_x(x_0, y_0, \ldots, z_0)\,,$$

und das kann je nach Vorzeichen von h sowohl größer als auch kleiner als $F(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ sein. Daher kann F im Punkt $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum haben.

6.3 Lineare Regression

Am einfachsten wird alles, wenn die Funktion linear von ihren Parametern abhängt; in diesem Fall spricht man von linearer Regression. Hier sei nur beispielhaft der für Ausgleichsgeraden wichtige Fall der Abhängigkeit von zwei Parametern betrachtet, d.h. wir haben

$$u = f(a, b; t) = a \cdot t + b\,.$$

Um alles so einfach wie möglich zu halten, nehmen wir zusätzlich an, daß alle Messungen (t_i, u_i) die gleiche Zuverlässigkeit haben, so daß es einfach darum geht, die Funktion

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (u_i - a \cdot t_i - b)^2$$

zu minimieren.

Bevor wir diese Funktion nach den Parametern a und b ableiten, empfiehlt es sich, sie zunächst auszumultiplizieren und a und b auszuklammern:

$$\begin{aligned} F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + a^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + n \cdot b^2 - 2 \cdot a \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot t_i \\ - 2 \cdot b \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i\,. \end{aligned}$$

Damit ist

$$F_a(a, b) = 2 \cdot a \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot t_i + 2 \cdot b \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i$$

und

$$F_b(a, b) = 2 \cdot n \cdot b - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i + 2 \cdot a \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i\,.$$

Da beide partielle Ableitungen verschwinden sollen, müssen beide Ausdrücke Null sein; nach Division durch zwei erhalten wir also die beiden

Gleichungen

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot u_i$$

und

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} u_i \, .$$

Um b zu eliminieren, multiplizieren wir die zweite Gleichung mit $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i$

$$a \cdot \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right)^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \right)$$

und subtrahieren dies von der ersten Gleichung:

$$a \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right)^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot u_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \right) ,$$

d.h.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot u_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \right)}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right)^2} \, .$$

Entsprechend läßt sich a eliminieren, wenn wir die erste Gleichung mit $\sum t_i$ und die zweite mit $\sum t_i^2$ multiplizieren, und wir erhalten

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot u_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^{n} t_i^2} \, .$$

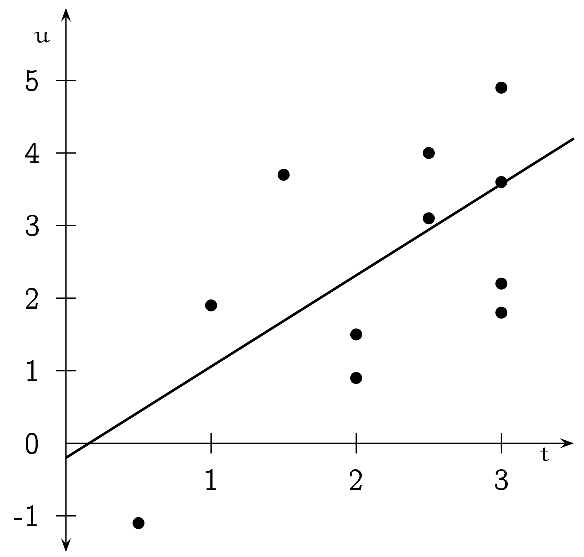
Als Beispiel dazu können wir die Voraussagen des Sachverständigenrats über den realen Anstieg des Bruttosozialprodukt (in den alten Bundesländern) mit den tatsächlichen Zahlen vergleichen:

Jahr:	1982	1983	1984	1985	1986	1987
vorausgesagt:	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+2\frac{1}{2}$	$+3$	$+3$	$+2$
tatsächlich:	$-1,1$	$+1,9$	$+3,1$	$+1,8$	$+2,2$	$+1,5$

Jahr:	1988	1989	1990	1991	1992
vorausgesagt:	$+1\frac{1}{2}$	$+2\frac{1}{2}$	$+3$	$+3$	$+2$
tatsächlich:	$+3,7$	$+4,0$	$+4,9$	$+3,6$	$+0,9$

Mit t_i = *vorausgesagtes Wachstum* und u_i = *tatsächliches Wachstum* ergibt sich nach Einsetzen in die obigen Formeln $a \approx 1,2$ und $b = -0,2$; die wirklichen Zahlen liegen also im Durchschnitt etwa 20% höher als die vorausgesagten. Genauer können wir sagen, daß der Sachverständigenrat *Trends*, das heißt Veränderungen der Wachstumsrate, *unterschätzt,* denn $(u_i - u_j) = a \cdot (t_i - t_j)$ ist im Durchschnitt 20% größer als das vorhergesagte $(t_i - t_j)$, und daß er im übrigen einen gewissen Grundoptimismus hat, der durch die Subtraktion von $0,2$ ausgeglichen werden muß.

Graphisch zeigt dies die Verteilung der Wertepaare für vorhergesagtes und tatsächliches Wachstum in der folgenden Abbildung; dort ist auch die Gerate $u = a \cdot t + b$ eingezeichnet. Wie man sieht, geht die Gerade zwar mitten durch die Punktwolke, aber viele Punkte liegen doch recht weit entfernt von ihr.



Dies stellt die Frage, wie man die Qualität der Ausgleichsgerade messen kann.

Seien im folgenden $\bar{t}$ der Mittelwert der t_i und $\bar{u}$ der Mittelwert der u_i. Falls die u_i und die t_i aus voneinander unabhängigen Prozessen stammen, ist der Erwartungswert von

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t}) \cdot (u_i - \bar{u})$$

Null, da die Summen der $t_i - \bar{t}$ und der $u_i - \bar{u}$ jeweils Null sind. Falls aber im anderen Extrem $u_i = a \cdot t_i + b$ ist für alle i, so ist $\bar{u} = a \cdot \bar{t} + b$ und

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t}) \cdot (u_i - \bar{u}) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t}) \cdot (a \cdot t_i - a \cdot \bar{t}) = a \cdot \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2$$

eine (fast immer) positive Zahl, die eng mit der Standardabweichung der Verteilung der t_i zusammenhängt. Um sie weiter auszurechnen, beachten wir, daß

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u})^2 = a^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2$$

ist und damit

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u}) = a^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2 \right)^2$$

oder

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u})} = a \cdot \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2 ,$$

wobei im Zähler immer die nichtnegative Quadratwurzel gewählt werden soll. Damit ist also der Quotient

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t}) \cdot (u_i - \bar{u})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u})}}$$

gleich ± 1, je nach Vorzeichen von a, wenn alle $u_i = a \cdot t_i + b$ sind, und $r = 0$, wenn die u_i unabhängig von den t_i sind. Mit elementaren Grundkenntnissen der Vektorrechnung läßt sich zeigen, daß r immer zwischen -1 und $+1$ liegt, und auch ohne Vektorrechnung ist das eine zwar etwas längliche, aber nicht allzu schwierige Rechnung. Dieses r nennen wir den *Korrelationskoeffizienten;* sein Betrag gibt an, wie gut die Beziehung zwischen den u_i und den t_i durch eine Gerade beschrieben werden kann, während sein Vorzeichen angibt, ob diese Gerade ansteigt oder sinkt. Im obigen Zahlenbeispiel ist $r \approx 0,62$, die Approximation ist also eher mittelprächtig.

6.4 Nichtlineare Regression

Im nichtlinearen Fall führt die Nullstellenbestimmung für die partiellen Ableitungen oft auf nur noch numerisch lösbare nichtlineare Gleichungssysteme. Wir haben uns vor deren Behandlung gedrückt, indem wir die Probleme immer durch eine geeignete Transformation auf lineare zurückgeführt haben.

Im Falle des exponentiellen Wachstums war das genau die richtige Strategie: Die lineare Regression für die Logarithmen minimiert die absoluten Fehler der Logarithmen, also die relativen Fehler der Ausgangswerte, und genau auf diese kommt es hier ja an.

Bei der logistischen Gleichung dagegen gibt es keine statistisch einwandfreie Grundlage unseres Vorgehens; hier sind die hier verwendeten Schätzungen definitiv keine *maximum likelihood* Schätzungen, sondern *ad hoc* Anpassungen, die die Fehler in verschiedenen Bereichen der Zeitreihe künstlich auf verschiedene Weise gewichten.

Für die Zwecke dieses Vortrags kann man damit (hoffentlich) leben; bei ernsthaften Anwendungen müßte man den Aufwand einer genaueren Schätzung treiben. Hinweise dazu findet man etwa in [**BR**], vor allem in §11.

7. Ausblick

Was haben wir nun erreicht?

Wir konnten jede der drei Zeitreihen aus §1.5 durch ein mathematisches Modell beschreiben und konnten auch erklären, warum dieses Modell wo versagt (Pillenknick in Deutschland, Babyboom in USA).

Alle Modelle waren extrem einfach: Wir haben weder die Alters- und Geschlechtsstruktur der Bevölkerungen berücksichtigt, noch haben wir regionale Unterschiede und bekannte oder vorhersehbare politische Entwicklungen in Betracht gezogen – umso erstaunlicher ist also die gute Übereinstimmung.

Zur langfristigen Vorhersage taugen alle Modelle trotzdem nur sehr bedingt: Das exponentielle Wachstum in Deutschland kann natürlich nicht mehr lange andauern, und die Verlangsamung der Wachstumsraten für die

Weltbevölkerung muß möglicherweise auch irgendwann an Grenzen stoßen, die unser Modell nicht berücksichtigt, da sie für die bisherige Dynamik noch keine Rolle spielen.

Allerdings führt auch die Beschreibung eines komplexen Phänomens durch ein einfaches, von weniger als fünf Parametern abhängiges Modell zu nützlichen Einsichten in die Natur dieses Phänomens und konnte hoffentlich die Nützlichkeit der mathematischen Modellierung auch bei nicht naturwissenschaftlich beschreibbaren Problemen demonstrieren.

L. Literaturhinweise

[**BR**] D. Brown, P. Rothery: *Models in Biology: Mathematics, Statistics and Computing,* Wiley, Chichester *etc.,* 1993

[**Co**] J.S. Coleman: *Introduction to Mathematical Sociology,* The Free Press, New York, 1964

[**D**] J.D. Durand: *Historical estimates of world population,* Population and development review 3 (1977), S. 253-296

[**FMA**] H. von Foerster, P.M. Mora, L.W. Amiot: *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026,* Science **138**, November 1960, Seite 1291–1295

[**FP**] J.C. Fisher, R.H. Pry: *A simple substitution model of technological change,* Technological Forecasting and Social Change **3** (1971), 75–88

[**GT**] H. Gould, J. Tobochnik: *An introduction to computer simulation methods, Applications to physical systems, part 1,* Addison-Wesley, 1987

[**H**] H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen,* Teubner, Stuttgart, 1989

[**Hei**] G.K. Heilig: *World population prospects: Analysing the 1996 UN population projections,* International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Österreich, Manuskript

WP-96-146; *auch im* WWW *unter* http://www.iiasa.ac.at/Research/LUC/Papers/ghk1

[MRW] R.A. Millikan, D. Roller, E.C. Watson: *Mechanics, Molecular Physics, Heat and Sound,* Ginn and Company, 1937; MIT Press, 1965

[P] R. Pearl: *The biology of death,* Lippincott, Philadelphia und London, 1922

[PR] R. Pearl: *On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation,* Proc. Nat. Acad. Sciences **6** (1920), 275–288

[W] K. Witthauser: *Verteilung und Dynamik der Erdbevölkerung (Ergänzungsheft* **272** *zu Petermanns Geographische Mitteilungen),* VEB Hermann Haack, Leipzig, 1969

[YSH] E.K. Yeargers, R.W. Shonkwiler, J.V. Herod: *An introduction to the mathematics of biology: with computer algebra models,* Birkhäuser, 1996

Wolfgang K. Seiler
Fakultät für Mathematik und Informatik
Seminargebäude A5
68131 Mannheim
seiler@math.uni.mannheim.de
http://hilbert.math.uni-mannheim.de/~seiler