Optimierung

Die Suche nach dem besten Weg

Schülerseminar an der Universität Mannheim
vom 6.–9. September 2000

Ü
B U
N G S
A U F
G A B E N

zusammengestellt von

WOLFGANG K. SEILER

WOLFGANG K. SEILER
Mathematisches Institut der
Universität Mannheim
68131 Mannheim

seiler@math.uni-mannheim.de

Kapitel 4
Übungsaufgaben

§0: Organisatorische Hinweise

a) Allgemeines

Die Übungen werden durchgeführt im Rechnerpool der Fakultät für Mathematik und Informatik. Dieser liegt hinter dem Institutsgebäude D7,27: Gehen Sie in dieses Gebäude, verlassen Sie es gleich wieder Richtung Hof und gehen Sie geradeaus weiter durch den Hof. An dessen gegenüberliegender Seite stehen Sie am Eingang zum Rechnerpool.

Dort stehen in der vorderen Hälfte des Saals 45 PCs, die am Übungsnachmittag für die Teilnehmer dieses Seminars reserviert sind. Diese Rechner werden unter Linux betrieben und laufen bereits. Falls Sie keinen Login-Bildschirm sehen, müssen Sie entweder die Maus bewegen oder aber den *Bildschirm* einschalten.

Die Rechner selbst dürfen auf keinen Fall ein- oder ausgeschaltet werden!

Wenn Sie sich mit Linux auskennen, können Sie vor der Anmeldung eine Benutzeroberfläche wählen; zur Anmeldung geben Sie Ihren Benutzernamen und Ihr Kennwort ein und warten, bis sich die Benutzeroberfläche aufgebaut hat.

Seminarteilnehmer, die noch keine Erfahrung mit Computern haben, sollten die PCs an der linken Wand und in der gegenüberliegenden Reihe benutzen; dort werde ich zu Beginn der Übungen eine kurze Einführung in den Umgang mit Maple geben.

Zum Schreiben von Programmen stehen Ihnen die gängigen UNIX-Editoren wie `vi` und `emacs` zur Verfügung; falls Sie damit keine Erfahrung haben, gibt es zwei einfache Editoren mit Windows-ähnlicher Bedienung. Diese starten Sie über das Menu, das nach Anklicken des großen Fußes links unten am Bildschirm erscheint, über die Menupunkte

Applikations ⇒ *Editor*

oder

KDE ⇒ *Applikations* ⇒ *Texteditor* .

Über den großen Fuß können Sie sich am Ende auch abmelden.

Alle Dateien, die Sie – egal an welchem Rechner im Pool – produzieren, sind in einem gemeinsamen Dateisystem im Verzeichnis

`/home/`*Ihr_Benutzername* .

Indem Sie in der unteren Leiste das Bilschirmsymbol anklicken (oder aber über den großen Fuß) erhalten Sie ein Terminalfenster, in dem Sie Befehle zum Bearbeiten der Dateien eingeben können. Wichtige Befehle sind

`ls`	Liste aller Dateien im Verzeichnis
`ls -l`	ausführliche Liste
`cp` *dat1 dat2*	Kopiere Datei *dat1* nach *dat2*
`mv` *dat1 dat2*	Benenne Datei *dat1* um in *dat2*
`rm` *dat*	Lösche Datei *dat*
`mcopy` *dat* `a:`	Kopiere Datei *dat* nach Laufwerk `A:`
`mdir a:`	Verzeichnis der Dateien im Laufwerk `A:`

b) Pascal

Diese Programmiersprache wurde in den Fragebogen zur Anmeldung am häufigsten genannt, spielt aber leider an der Universität Mannheim schon seit vielen Jahren keine Rolle mehr. Speziell für dieses Seminar wurde für die PCs (und nur für diese) im Rechnerpool behelfsmäßig *Free Pascal* installiert, ein Pascalcompiler, der außer Standard-Pascal auch die meisten Besonderheiten von Turbo-Pascal beherrscht.

Zum Schreiben, Compilieren und Ausführen eines Pascalprogramms gehen Sie so vor: Erzeugen Sie über den Dateimanager oder mit einem der

Editoren eine Datei $Name$`.pas`, die Ihr Programm enthält und speichern Sie diese. Sodann geben Sie in einem Terminalfenster den Befehl

`pascal` $Name$

zum Compilieren. *Optionen können nicht angegeben werden.*

Falls Ihr Programm Fehler enthält, meldet der Compiler die Zeile und Spalte, wo ihm etwas unerwartetes begegnet ist und sagt, was ihn verwirrt. Verbessern Sie den Fehler, speichern Sie neu ab und wiederholen Sie den obigen Befehl. (Mit `!!` können Sie den zuletzt eingegebenen Befehl nochmals ausführen lassen.) Bedingt durch die Behelfsmäßigkeit der Installation kann es Ihnen passieren, daß auch bei korrekten Programmen Meldungen wie *Warning: Assembler as not found* oder *Utility ld not found* auf dem Bildschirm erscheinen; diese können Sie ignorieren. Falls Ihr Programm $Name$`.pas` korrekt übersetzt wurde, können Sie es (im Terminalfenster) starten, indem Sie den Befehl $Name$ eingeben. Falls die Daten der Standardeingabe INPUT nicht im Terminalfenster eingegeben werden sollen, sondern aus einer Datei $dat1$ gelesen werden, können Sie dies durch

$name < dat1$

veranlassen.

$name > dat2$

lenkt entsprechend die Standardausgabe OUTPUT um auf $dat2$, und

$name < dat1 > dat2$

kombiniert beides.

c) C und C++

Hierfür steht der GNU C-Compiler `gcc` zur Verfügung; `.c`-Dateien werden als C-Dateien interpretiert und C++-Dateien haben eine der Endungen `.cc`, `.cpp` oder `.c++`.

d) Maple

Maple ist nicht auf den PCs des Rechnerpools installiert, sondern auf dem zentralen Server *alfirk*. Sie müssen sich daher von Ihrem PC aus

dort anmelden. Dazu müssen Sie zunächst dessen Rechnernamen kennen; den sehen Sie auf dem Anmeldebildschirm oder aber, indem Sie in einem Terminalfenster den Befehl

```
uname -n
```

eingeben. Damit *alfirk* auf Ihrem Bildschirm das Maple-Fenster öffnen darf, müssen Sie dann den Befehl

```
xhost +alfirk
```

eingeben. Die Anmeldung bei *alfirk* erfolgt über

```
rlogin alfirk
```

und hat geklappt, wenn Sie dann nach Ihrem Passwort gefragt werden. Sobald die Loginmeldungen durch Ihr Terminalfenster gerauscht sind, sagen Sie *alfirk*, daß Sie Graphikausgabe Ihrer Programme auf Ihrem PC-Bildschirm sehen möchten:

`export set DISPLAY=`$Rechnername$`:0`

und starten Maple mit

```
xmaple
```

alfirk benutzt dasselbe Dateisystem wie die PCs, Sie können also auf dem einen Rechner erzeugte Dateien auch auf dem anderen lesen und weiterbearbeiten.

Da wir im Rechnerpool nur zehn Lizenzen für Maple haben, gilt das allerdings nur so lange, wie nicht mehr als zehn Teilnehmer gleichzeitig mit Maple arbeiten. Speichern Sie deshalb bitte Ihr *worksheet* und verlassen Sie Maple, wenn Sie sich in den nächsten Minuten mit etwas anderem beschäftigen, so daß auch andere eine Chance haben.

Falls Sie wegen des Mangels an Lizenzen Maple auf *alfirk* nicht starten können, gibt es noch folgenden Notbehelf: Maple läuft auch auf dem Netzwerk der Mathematik, insbesondere auf dessen zentralem Server *euklid.math.uni-mannheim.de*. Dort starten Sie es, indem Sie zunächst auf Ihrem PC den Befehl

```
xhost +euklid.math.uni-mannheim.de
```

geben, danach den Befehl

```
/usr/rbin/telnet +euklid.math.uni-mannheim.de -l nlo
```

Das Paßwort ist `nlo-Simplex`. Danach geht es weiter wie bei *alfirk*, allerdings mit einem wichtigen Unterschied: Das Dateisystem von *euklid* hat nichts mit dem des Rechnerpools zu tun, und alle Seminarteilnehmer, die auf *euklid* arbeiten, sind zumindest zunächst im selben Verzeichnis. Erzeugen Sie dort entweder Ihr eigenes Unterverzeichnis durch

`mkdir` *name*

und wechseln Sie dann jeweils *vor* dem Aufruf von Maple dorthin durch

`cd` *name*

oder wählen Sie Ihre Dateinamen so, daß mit hoher Wahrscheinlichkeit kein anderer Teilnehmer denselben Namen benutzt.

e) Mathematica

Ob und wie Mathematica benutzt werden kann, steht bei Drucklegung noch nicht fest, da es immer noch technische Probleme gibt. Bei Interesse können Sie während der Übung von mir den neuesten Stand erfahren.

§1: Zum Aufwärmen

Schon EUKLID stellte in seiner *Optik* fest, daß bei der Lichtreflektion der eintretende und der austretende Strahl in einer Ebenen liegen und daß Eintrittswinkel und Austrittswinkel übereinstimmen. Etwa vierhundert Jahre später, um 100 nach Christus, erkannte dies HERON als ein Optimierungsprinzip:

Der kürzeste Weg von einem Punkt P zu einem Punkt Q, der einen Punkt einer vorgegebenen Geraden g enthält, hat die Eigenschaft, daß im Reflektionspunkt auf g der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel ist.

a) HERON bewies dieses Prinzip mit einfachsten Methoden der Elementargeometrie. Können auch Sie einen solchen Beweis finden?

b) Mit Methoden der Differentialrechnung läßt sich dies natürlich leicht mit brutaler Gewalt nachrechnen. *Wie?*

c) Ein Montageroboter soll Chips und sonstige Bauteile auf eine Platine setzen. Die Platine wird von einem Transportband auf den Tisch vor dem Roboter plaziert; am dem Roboter zugewandten Rand des Tisches hängen Behälter, in denen die verschiedenen Bauteile liegen. Die Reihenfolge der Plazierung der Bauteile auf der Platine steht fest und natürlich auch deren Position auf der Platine. Wie muß man die Behälter plazieren, um den gesamten Fahrweg des Roboterarms während des Montageprozesses zu minimieren?

d) Falls der Roboter hinreichend weit greifen kann, sollte man die Behälter natürlich besser auch noch teilweise auf der Gegenseite des Tisches plazieren. (Die beiden anderen Seiten kommen wegen des Transportbands nicht in Frage.) Welche Strategie verfolgen Sie jetzt?

e) Zurück zur Optik: Die Lichtgeschwindigkeit innerhalb eines optisch isotropen Mediums (das sind abgesehen von gewissen Kristallen fast alle gängigen Medien) hängt ab von einer Stoffkonstante des Mediums, dem Brechungsindex n: Ist c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, so ist die Lichtgeschwindigkeit im Medium c/n. Nach dem FERMATschen Prinzip wählt das Licht seinen Weg so, daß es möglichst schnell vom Eintrittspunkt zum Austrittspunkt kommt; innerhalb eines (isotropen) Mediums bewegt es sich also auf einer Geraden. Leiten Sie aus dem FERMATschen Prinzip das SNELLIUSsche Brechungsgesetz her für den Fall, daß das Licht zunächst durch ein Medium mit Brechungsindex n_1 und dann durch eines mit Brechungsindex n_2 geht!

§2: Zum Spielen

Unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/~seiler/NLO`

finden Sie Maple-*worksheets* zu den Demonstrationen aus dem Vortrag über nichtlineare Optimierung. Laden Sie diese auf Ihren Computer und experimentieren Sie damit durch Verändern der Parameter und der Funktionen!

§3: Partielle Ableitungen

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen nach allen darin auftretenden Variablen und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen von Maple! Dort veranlaßt

```
diff(f, x)
```

die Ableitung von `f` nach `x`, wobei `f` ein beliebiger Ausdruck sein kann und `x` eine beliebige Variable.

a) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

b) $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + 3y^4$

c) $f(x,y) = \sin xy$

d) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

e) $f(x,y) = e^{x\cos xy}$

f) $f(x,y) = x^y$

g) Eine etwas theoretischere Aufgabe: $f,g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien zwei differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie:

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f\,.$$

h) Was können Sie über die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sagen, wenn

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x} \equiv 0$$

überall verschwindet? (Beispiel für ein solches f ist die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$, aber natürlich gibt es noch viele andere.)

§4: Optimierungsaufgaben ohne Nebenbedingungen

a) Bestimmen Sie alle (lokalen) Maxima und Minima der Funktion $f(x,y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$ in $\mathbb{R}^2$!

b) Bestimmen Sie alle (lokalen) Maxima und Minima der Funktion $f(x,y) = \sin(x+y)\cos(x-y)$!

c) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ habe ihr einziges Maximum im Punkt $(0,0,0)$. Bestimmen Sie die sämtlichen Maxima der Funktion $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\ \ (x,y,z) \mapsto f\bigl(x^2 - z^2, x-1, y\bigr)$!

§5: Ausgleichsrechnung

a) Der Sachverständigenrat für die Beurteilung der wirtschaftlichen Gesamtentwicklung sagt jedes Jahr das Wachstum des Bruttosozialprodukts voraus. Hier sind einige seiner Vorhersagen, verglichen mit der tatsächlichen Entwicklung:

Jahr:	1982	1983	1984	1985	1986	1987
vorausgesagt:	$+\frac12$	$+1$	$+2\frac12$	$+3$	$+3$	$+2$
tatsächlich:	$-1,1$	$+1,9$	$+3,1$	$+1,8$	$+2,2$	$+1,5$

Jahr:	1988	1989	1990	1991	1992
vorausgesagt:	$+1\frac12$	$+2\frac12$	$+3$	$+3$	$+2$
tatsächlich:	$+3,7$	$+4,0$	$+4,9$	$+3,6$	$+0,9$

Berechnen Sie eine lineare Funktion, die den Zusammenhang zwischen tatsächlichem Wert und Vorhersage möglichst genau beschreibt! Können Sie deren Koeffizienten inhaltlich interpretieren?

b) Ein Fahrzeug bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 entlang einer geraden Straße. Ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ wirkt eine konstante Bremskraft.
1) Zeigen Sie, daß sich danach, bis zum Stillstand, der Weg als Funktion der Zeit in der Form $s(t) = at^2 + bt + c$ schreiben läßt mit $a,b,c \in \mathbb{R}$.
2) An $N \ge 10$ Punkten $s_1,\dots,s_N$, wird die Zeit t_i gestoppt, zu der das Fahrzeug dort vorbeifährt. Überlegen Sie sich, wie a,b,c mittels der Punkte (s_i,t_i) möglichst gut geschätzt werden können.
3) In einem konkreten Fall wurde die Zeit ab Bremsbeginn alle $10m$ gestoppt mit folgenden Ergebnissen:

s [m]:	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
t [sec]:	0	$1,07$	$2,25$	$2,74$	$3,53$	$4,52$	$5,83$	$6,05$	$7,38$	$8,84$	$11,51$

Berechnen Sie Schätzwerte für a, b, c, für v_0 und für den Zeitpunkt, zu dem das Fahrzeug zum Stillstand kommt!

c) Die folgenden Zahlenpaare $[x, y]$ stehen für Klausurergebnis x (24 Punkte waren zum bestehen notwendig) und y% der maximal möglichen Punktzahl bei den wöchentlichen Übungen (40% waren notwendig) bei der Vorlesung *Höhere Mathematik I* im Sommersemester 1998.

(29.5, 77)	(9, 45)	(31, 74)	(43.5, 86)	(43, 53)
(35, 64)	(51.5, 91)	(42.5, 77)	(52.5, 95)	(13.5, 47)
(10, 70)	(25.5, 57)	(20, 80)	(13, 69)	(16, 50)
(48.5, 91)	(12, 39)	(47, 78)	(32.5, 63)	(30, 64)
(8, 63)	(52.5, 96)	(8.5, 64)	(15.5, 74)	(43, 79)
(34, 47)	(14.5, 62)	(9, 32)	(1.5, 0)	(30.5, 70)
(35, 72)	(45.5, 82)	(42.5, 87)	(27.5, 76)	(39, 56)
(36, 46)	(20, 80)	(31.5, 74)	(30.5, 67)	(21, 70)
(47, 85)	(44, 72)	(35.5, 52)	(27, 67)	(19.5, 57)
(38.5, 65)	(44.5, 95)	(42.5, 79)	(20.5, 78)	(37.5, 66)
(30.5, 50)	(49, 66)	(30, 68)		

Berechnen Sie die Ausgleichsgerade, diskutieren Sie deren Qualität und interpretieren Sie die weit von der Gerade entfernt liegenden Punkte!

§6: Bimbes

Jedes Jahr veröffentlicht die Organisation *Transparancy International* ihren *corruption perceptions index (CPI),* in dem jedem Land eine Zahl zwischen null und zehn zugeordnet wird, je nachdem, wie stark Geschäftsleute, Risikospezialisten und die Bevölkerung die Korruption im betreffenden Land einschätzen: Ein Index von zehn bedeutet, daß es praktische keine Korruption gibt, während bei null nichts ohne Korruption geht. Der neueste Index stammt von Ende 1999 und ist unter

`http://www.transparency.org/documents/cpi/index.html`

zu finden.

Dieser Index wir hier verglichen mit dem Bruttosozialprodukt per Einwohner, wie es die Weltbank für 1997 festgestellt hat. Dies sind die neuesten verfügbaren Zahlen; sie sind beispielsweise auf dem Server des Statistischen Bundesamtes unter

`http://www.statistik-bund.de/basis/d/ausl/ausllae5.htm`

zu finden. In der folgenden Tabelle sind alle Staaten aufgelistet, für die beide Zahlen vorliegen; das Bruttosozialprodukt pro Einwohner in US-$ ist kursiv gedruckt, der Korruptionsindex fett:

Ägypten	*1200*	**3,3**
Albanien	*760*	**2,3**
Argentinien	*8950*	**3,0**
Armenien	*560*	**2,5**
Aserbaidschan	*510*	**1,7**
Australien	*20650*	**8,7**
Belgien	*26730*	**5,3**
Bolivien	*970*	**2,5**
Botsuana	*3310*	**6,1**
Brasilien	*4790*	**4,1**
Chile	*4820*	**6,9**
China (ohne Hongkong & Taiwan)	*860*	**3,4**
Costa Rica	*2680*	**5,1**
Côte d'Ivoire	*710*	**2,6**
Dänemark	*34890*	**10,0**
Deutschland	*28280*	**8,0**
Ecuador	*1570*	**2,4**
El Salvador	*1810*	**3,9**
Estland	*3360*	**5,7**
Finnland	*24790*	**9,8**
Frankreich	*26300*	**6,6**
Ghana	*390*	**3,3**
Griechenland	*11640*	**4,9**
Großbritannien und Nordirland	*20870*	**8,6**
Guatemala	*1580*	**3,2**

Honduras	*740*	**1,8**
Hongkong	*25200*	**7,7**
Indien	*370*	**2,9**
Indonesien	*1110*	**1,7**
Irland	*17790*	**7,7**
Island	*26580*	**9,2**
Israel	*16180*	**6,8**
Italien	*20170*	**4,7**
Jamaika	*1550*	**3,8**
Japan	*38160*	**6,0**
Jordanien	*1520*	**4,4**
Kamerun	*620*	**1,5**
Kanada	*19640*	**9,2**
Kasachstan	*1350*	**2,3**
Kenia	*340*	**2,0**
Kirgisistan	*480*	**2,2**
Kolumbien	*2180*	**2,9**
Korea, Republik	*10550*	**3,8**
Kroatien	*4060*	**2,7**
Lettland	*2430*	**3,4**
Litauen	*2260*	**3,8**
Luxemburg *(BSP von 1996)*	*45360*	**8,8**
Malawi	*210*	**4,1**
Malaysia	*4530*	**5,1**
Marokko	*1260*	**4,1**
Mauritius	*3870*	**4,8**
Mazedonien	*1100*	**3,3**
Mexiko	*3700*	**3,4**
Mongolei	*390*	**4,3**
Mosambik	*140*	**3,5**
Namibia	*2110*	**5,3**
Neuseeland	*15830*	**9,4**
Nicaragua	*410*	**3,1**
Niederlande	*25830*	**9,0**
Nigeria	*280*	**1,6**
Norwegen	*36100*	**8,9**

Österreich	*27920*	**7,6**
Pakistan	*500*	**2,2**
Paraguay	*2000*	**2,0**
Peru	*2610*	**4,5**
Philippinen	*1200*	**3,6**
Portugal	*11010*	**6,7**
Sambia	*370*	**3,5**
Schweden	*26210*	**9,4**
Schweiz	*43060*	**8,9**
Senegal	*540*	**3,4**
Singapur	*32810*	**9,1**
Singapur	*32810*	**9,1**
Slowenien	*9840*	**6,0**
Spanien	*14490*	**6,6**
Südafrika	*3210*	**5,0**
Tansania, Vereinigte Republik	*210*	**1,9**
Thailand	*2740*	**3,2**
Tunesien	*2110*	**5,0**
Türkei	*3130*	**3,6**
Uganda	*330*	**2,2**
Uruguay	*6130*	**4,4**
Usbekistan	*1020*	**1,8**
Venezuela	*3480*	**2,0**
Vereinigte Staaten	*29080*	**7,5**
Vietnam	*310*	**2,6**

Der erste Augenschein zeigt, daß korruptionsärmere Länder oftmals reicher sind: Das praktisch korruptionsfreie Dänemark hat ein Bruttosozialprodukt von 34 890 \$ pro Einwohner, das deutlich korruptere Deutschland nur 28 280 \$ und ein stark korruptes Land wie Aserbaidschan nur 510 \$. Es lohnt sich also, eine Ausgleichsgerade zu berechnen. Wie sieht diese aus? Welche Staaten sind besonders weit von der Geraden entfernt? Wo liegt Deurtschland?

§7: Optimierungsaufgaben mit Nebenbedingungen

a) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y) = xy$ auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$!

b) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $f(x,y) = xy$ auf der Ellipse

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \,!$$

c) Bestimmen Sie die Maxima und Minima von $f(x,y,z) = xyz$ auf der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$!

d) Ein Produkt werde aus drei Resourcen hergestellt, die jeweils 80 DM, 12 DM *bzw.* 10 DM pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können für 24 000 DM maximal gefertigt werden? Ab welchem Stückpreis für das fertige Produkt lohnt es sich, den Einsatz von 24 000 DM zu erhöhen?

e) Ein Produkt werde aus drei Resourcen hergestellt, die jeweils 10 DM, 5 DM *bzw.* 20 DM pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $40\sqrt{x}\sqrt[4]{y}\sqrt[4]{z}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können für 50 000 DM maximal gefertigt werden? Ab welchem Stückpreis für das fertige Produkt lohnt es sich, den Einsatz von 50 000 DM zu erhöhen?