Mehrstufige Prozesse I: Deterministische Prozesse

von Wolfgang K. Seiler

Im Lehrplan für das Gymnasium sind mehrstufige Prozesse nur in der Form deterministischer linearer Prozesse vorgesehen: Der Zustand eines Systems zum Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}_0$ ist gegeben durch einen Vektor $x_k \in \mathbb{R}^n$, und die Entwicklung des Systems wird beschrieben durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ über die Gleichung

$$x_{k+1} = Ax_k \,.$$

Im heutigen Seminar soll es um Systeme gehen, deren Entwicklung komplizierteren Regeln folgt: Zunächt, hier in diesem Vortrag, um nichtlineare Zusammenhänge

$$x_{k+1} = f(x_k) \,,$$

in den nächsten beiden Vorträgen dann um Zusammenhänge, die nicht mehr deterministisch sind, sondern von Zufallseinflüssen abhängen.

Auch damit sind bei weitem noch nicht alle mehrstufigen Prozesse abgedeckt: Schließlich gibt es keinen Grund, warum ein Zustand eines Systems unbedingt durch einen *Vektor* beschrieben werden muß. Er kann genausogut durch eine Funktion, eine Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ oder eines Funktionenraums oder etwas ähnliches beschrieben werden. In der Tat haben mehrstufige Prozesse auch hier ihre Anwendungen, beispielsweise bei der fraktalen Bildkomprimierung, wie sie etwa für die Enzyklopädie Microsoft Encarta verwendet wird, oder für die Modellierung des Pflanzen- und teilweise auch tierischen Wachstums durch Lindenmayer-Systeme. Diese Anwendungen werden jedoch im heutigen Seminar keine Rolle spielen.

Auch für mehrdimensionale nichtlineare Prozesse wird die Zeit nicht reichen; hinzu kommt, daß für die wenigsten solchen Prozesse gesicherte mathematische Ergebnisse vorliegen. Deshalb werde ich mich heute ausschließlich auf eindimensionale Prozesse beschränken.

Während lineare eindimensionale Prozesse wegen ihres recht starren und unrealistischen Verhaltens sowie ihrer Trivialität so gut wie keine Rolle spielen, werden selbst relativ einfache nichtlineare eindimensionale Prozesse sowohl in den Natur- als auch in den Wirtschaftswissenschaften immer wieder als erstes grobes Modell untersucht. Daß sie durchaus nichttriviale Aspekte haben können, sieht man nicht nur an einer Vielzahl noch ungelöster Probleme, sondern auch daran, daß sowohl auf dem diesjährigen Internationalen Mathematikerkongreß in Berlin als auch auf dem vorigen, 1994 in Zürich, je eine der vier Fields-Medaillen an einen Wissenschaftler ging, der sich unter anderem mit solchen Fragen beschäftigt.

1. Lineare eindimensionale Prozesse

a) Der homogene Fall

Zum besseren Verständnis der auftretenden Probleme, möchte ich zunächst den wohlbekannten Fall eines eindimensionalen linearen Prozesses noch einmal kurz wiederholen. Hier haben wir eine lineare Gleichung

$$x_{k+1} = ax_k \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}$$

und sehen sofort, daß sich

$$x_k = a^k x_0$$

leicht durch eine geschlossene Formel ausdrücken läßt. Das dynamische Verhalten des Systems ist damit klar:

- Ist $|a| < 1$, so konvergiert x_k gegen Null, monoton für positives a, alternierend für negatives. Für $a = 0$ ist der Limes bereits nach der ersten Iteration erreicht.
- Ist $|a| = 1$, so bleibt entweder jeder Punkt fest (für $a = 1$), oder aber jeder Punkt außer dem Nullpunkt alterniert ständig zwischen zwei Positionen, liegt also in eimem Zweierzyklus.
- Ist $|a| > 1$, so „explodiert" das System: Abgesehen vom Nullpunkt geht jeder Punkt zumindest betragsmäßig gegen unendlich. Für positives a geht er monoton gegen $+\infty$ oder $-\infty$, für negatives a alterniert das Vorzeichen.

b) Inhomogene lineare Prozesse

Als erste, zaghafte, Verallgemeinerung des Prozesses $x_{k+1} = ax_k$ bietet sich die inhomogene lineare Gleichung

$$x_{k+1} = ax_k + b$$

an. Während bislang der Punkt $x_0 = 0$ immer festblieb, ist das nun nicht mehr der Fall; für $a = 1$ und $b \neq 0$ gibt es offensichtlich überhaupt keinen Fixpunkt mehr! Das ist aber auch schon der einzige solche Fall; für $a \neq 1$ ist

$$ax + b = x \iff (a-1)x = -b \iff x = \frac{-b}{a-1}\,,$$

es gibt also stets genau einen Fixpunkt.

Da Koordinaten immer nur ein Hilfsmittel sind, spricht nicht dagegen, daß wir das Koordinatensystem wechseln und den Fixpunkt zum neuen Nullpunkt machen, d.h. wir betrachten die neue Koordinate

$$y = x + \frac{b}{a-1}\,,$$

die den Abstand eines Punktes vom Fixpunkt angibt. In dieser Koordinaten ausgedrückt, ist

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= ax_k + b = a\left(y_k - \frac{b}{a-1}\right) + b = ay_k + \frac{-ab + b(a-1)}{a-1} \\ &= ay_k - \frac{b}{a-1}\,. \end{aligned}$$

Nun interessieren wir uns aber nicht für x_{k+1}, sondern für

$$y_{k+1} = x_{k+1} + \frac{b}{a-1} = ay_k\,;$$

in den neuen Koordinaten haben wir also wieder den alten homogenen linearen Prozeß.

Mit Ausnahme des Falls $a = 1$, der auf Translationen führt, brachten die inhomogenen linearen Gleichungen also nichts neues; sie haben uns aber gezeigt, daß man durch geschickte Wahl des Koordinatensystems einen Prozeß gelegentlich erheblich einfacher darstellen kann.

2. Quadratische Prozesse

a) Eine Normalform

Die naheliegendste Verallgemeinerung eines linearen Prozesses ist ein quadratischer; wir betrachten also die Iteration

$$x_{k+1} = ax_k^2 + bx_k + c \quad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,.$$

Wie der vorige Abschnitt zeigt, haben wir durchaus gute Chancen, daß sich diese Gleichung in einem geeigneten anderen Koordinatensystem deutlich vereinfacht. Sinnvoll ist so ein Koordinatenwechsel natürlich nur, wenn er das Bild des Prozesses nicht zu sehr verzerrt; wir betrachten daher nur Koordinatenwechsel von der Form

$$x_k = \alpha y_k + \beta \quad \text{oder} \quad y_k = \frac{x_k - \beta}{\alpha}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, wobei natürlich $\alpha \neq 0$ sein muß. In y_k ausgedrückt ist dann

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= a(\alpha y_k + \beta^2) + b(\alpha y_k + \beta) + c \\ &= a\alpha^2 y_k^2 + (b\alpha + 2a\alpha\beta)y_k + (b\beta + c + a\beta^2) \end{aligned}$$

und somit

$$y_{k+1} = \frac{x_{k+1} - \beta}{\alpha} = a\alpha y_k^2 + (b + 2a\beta)y_k + \frac{(b-1)\beta + c + a\beta^2}{\alpha}\,.$$

Die Parameter α, β können wir nun so wählen, daß das Ergebnis möglichst einfach wird. Da für eine quadratische Form $a \neq 0$ sein muß, können wir beispielsweise

$$\alpha = \frac{1}{a}$$

setzen; auf diese Weise wird der Koeffizient von y_k^2 zu Eins. Setzen wir dann noch

$$\beta = \frac{-b}{2a}\,,$$

bringen wir den Koeffizienten von y_k zum Verschwinden und erhalten die einfache Gleichung

$$y_{k+1} = y_k^2 - \widetilde{c} \quad \text{mit} \quad \widetilde{c} = \frac{b^2}{4} - \frac{b}{2} - ac\,.$$

Das dynamische Verhalten des Prozesses hängt also nur von einem einzigen reellen Parameter ab; es genügt, wenn wir die Prozesse

$$y_{k+1} = y_k^2 - c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

untersuchen, was erheblich weniger Aufwand erfordert. Nur einen Nachteil hat diese Form: Es fällt sehr schwer, ein Beispiel zu finden, das auf natürliche Weise auf einen Prozeß dieser Art führt. Deshalb wollen wir uns auf die Suche machen nach einer leicht komplizierteren Normalform, die dafür aber in natürlicher Weise bei einer ganzen Reihe von Anwendungen auftritt:

b) Logistisches Wachstum

Unter (diskretem) logistischem Wachstum versteht man den Prozeß

$$x_{k+1} = \lambda x_k(1 - x_k) \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,;$$

tatsächlich interessant ist vor allem der Fall, daß $1 \leq \lambda \leq 4$ ist.

Logistisches Wachstum wurde um 1838 eingeführt von dem belgischen Mathematiker PIERRE-FRANÇOIS VERHULST, der damit das Bevölkerungswachstum in einem Staat erklären wollte: Nach seinem Ansatz gibt es eine Maximalpopulation M, die ein gegebenes Territorium ernähren kann, und das Bevölkerungswachstum ist proportional

- einerseits zur aktuellen Bevölkerungszahl
- andererseits zur Differenz bis zur Grenze M.

In Formeln ist daher, wenn x_k die Bevölkerungszahl im Jahr k bezeichnet,

$$x_{k+1} = \lambda x_k(M - x_k)\,.$$

Die relative Bevölkerungszahl $y_k = x_k/M$ bezogen auf die Maximalpopulation genügt dann der obigen Gleichung mit $M = 1$.

VERHULST betrachtete tatsächlich nicht diese diskrete Gleichung, sondern die entsprechende Differentialgleichung

$$y'(t) = \lambda y(t)\big(M - y(t)\big)\,,$$

da Bevölkerungswachstum nicht nur einmal jährlich auftritt. Es gibt allerdings eine Reihe von Tierarten, bei denen Geburten jedes Jahr nur zu einem bestimmten Zeitpunkt vorkommen, und für diese ist der obige diskrete Wachstumsprozeß das geeignete Modell. In der Tat wurden für gewisse Insektenpopulationen auch Phänomene beobachtet, die für dieses diskrete

Modell charakteristisch sind und zu denen wir in Kürze kommen werden; sie dazu [**M**], [**MO**].

Auch in der Klimatologie kann die diskrete logistische Gleichung als ein grob vereinfachtes Modell der Entwicklung angesehen werden: Beispielsweise führt bei manchen Klimaszenarien über dem Pazifik die Erwärmumg des Meeres durch Sonnenstrahlung zu vermehrter Wolkenbildung durch Verdunstung, die dann wiederum die Sonnenstrahlung abschirmt und damit die Erhitzung des Wassers über eine gewisse Temperatur hinaus verhindert.

In den Wirtschaftswissenschaften schließlich benutzte beispielsweise JEAN-MICHEL GRANDMONT [**G**] als allereinfachstes Modell auch das diskrete logistische Modell um zu zeigen, daß Börsenkurse rein aufgrund einer *endogenen* Dynamik so schwanken können, wie sie es tun; man braucht also nicht unbedingt auch stochastische Einflüsse, um die Dynamik an der Börse zu erklären.

c) Die logistische Gleichung als Normalform für quadratische Gleichungen

Auch die logistische Gleichung

$$x_{k+1} = \lambda x_k(1 - x_k) = -\lambda x_k^2 + \lambda x_k$$

ist eine quadratische Gleichung; sie zeichnet sich dadurch aus, daß die Koeffizienten des linearen und des quadratischen Terms entgegengesetzt gleich sind, während der konstante Term verschwindet. Mit obigem Ansatz kann man versuchen, eine Koordinatentransformation

$$x_k = \alpha y_k + \beta \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

zu finden, die diese Form erreicht; man wird schnell sehen, daß dies nicht immer möglich ist: Zwar kann man durch die erste Bedinung leicht eine der beiden Zahlen α, β durch die zweite ausdrücken, aber das Verschwinden des konstanten Terms liefert dann eine quadratische Gleichung, die keine reellen Lösungen zu haben braucht.

Der Grund dafür ist auch ohne Rechnung klar: Die Gleichung

$$x = \lambda x(1 - x)$$

hat die beiden Lösungen $x = 0$ und

$$1 = \lambda(1 - x) \quad \text{oder} \quad x = 1 - \frac{1}{\lambda},$$

es gibt also immer zwei Fixpunkte: Ist *ein* $x_k = 0$ oder $x_k = 1 - \frac{1}{\lambda}$, so gilt dasselbe auch für alle folgenden x_k.

Diese Eigenschaft einen Fixpunkt zu haben ist unabhängig vom Koordinatensystem; ein quadratischer Prozeß kann also höchstens dann in eine logistische Gleichung transformiert werden, wenn er einen (dann ist $\lambda = 1$) oder zwei Fixpunkte hat.

Betrachten wir der Einfachheit halber anstelle der allgemeinen Gleichung die Normalform

$$x_{k+1} = x_k^2 - c \,.$$

(Abgesehen von den etwas komplizierteren Formeln geht die direkte Transformation eines allgemeinen quadratischen Prozesses in einen logistischen genauso.) Hier gilt

$$x = x^2 - c \Longleftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = c + \frac{1}{4} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{x + \frac{1}{4}} \,,$$

die Gleichung hat also genau dann reelle Lösungen, wenn $c \geq -1/4$ ist. In diesem Fall läßt sie sich leicht durch Koordinatenwechsel in eine logistische Gleichung transformieren: Mit $x_k = \alpha y_k + \beta$ wie oben ist

$$x_{k+1} = (\alpha y_k + \beta)^2 - c = \alpha^2 y_k^2 + 2\alpha\beta y_k + \beta^2 - c \,,$$

also

$$y_{k+1} = \frac{x_{k+1} - \beta}{\alpha} = \alpha y_k^2 + 2\beta y_k + \frac{\beta^2 - \beta - c}{\alpha} \,.$$

Wir müssen den konstanten Term zum Verschwinden bringen, d.h. ein β finden, so daß der Zähler des rechtsstehenden Bruchs verschwindet; wie wir gerade bei der Berechnung eines Fixpunkts von $x \mapsto x^2 - c$ gesehen haben, ist dies genau dann möglich, wenn $c \geq -1/4$ ist, also genau dann, wenn mindestens ein reeller Fixpunkt existiert. Sodann müssen noch die Koeffizienten von x_k^2 und x_k entgegengesetzt gleich gemacht werden; dazu müssen wir nur $\alpha = -2\beta$ setzen. Also läßt sich in der Tat jeder quadratische Prozeß mit reellem Fixpunkt in einem geeigenten Koordinatensystem durch eine logistische Gleichung beschreiben.

d) Erste Ergebisse über das dynamische Verhalten quadratischer Prozesse

Welche quadratischen Prozesse verlieren wir, wenn wir nur solche mit Fixpunkt betrachten? Zum Glück nur die uninteressanten, denn allgemein gilt:

Satz: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion und für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ sei die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiert durch $x_{k+1} = f(x_k)$. Falls es kein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = x$, ist

- entweder $f(x) > x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \infty$
- oder $f(x) < x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = -\infty$.

Beweis: Wenn es keinen Fixpunkt gibt, hat die Funktion $f(x) - x$ keine Nullstelle, muß also, da sie stetig ist, entweder überall positiv oder überall negativ sein. Die Folge der x_k ist daher entweder (strikt) monoton steigend oder (strikt) monoton fallend. Falls sie beschränkt wäre, müßte sie gegen eine Zahl x_∞ konvergieren, und wegen der Stetigkeit von f wäre $f(x_\infty) = x_\infty$, d.h. x_∞ wäre ein Fixpunkt. ∎

Prozesse, die monoton gegen $\pm\infty$ konergieren, sind nur selten eine realistische Beschreibung eines Vorgangs; falls nicht gerade etwas Katastrophales passiert, erwarten wir von jedem Prozeß, daß sich seine Variablen in einem beidseitig beschränkten Bereich bewegen. Daher fällt der Verzicht auf fixpunktfreie Prozesse nicht schwer.

Auch die Prozesse mit Fixpunkt sind aber nicht alle interessant im gerade erwähnten Sinne: Zunächst können wir den Fall $\lambda = 0$ als trivial beseitelegen. Für $\lambda \neq 0$ hat

$$f(x) = \lambda x(1 - x) = \lambda x - \lambda x^2$$

die Ableitung

$$f'(x) = \lambda - 2\lambda x = \lambda(1 - 2x)\,,$$

die bei $x = \frac{1}{2}$ verschwindet; der Graph von f ist also eine Parabel mit Scheitel bei $x = \frac{1}{2}$ und $f(x) = \frac{1}{4}\lambda$; für $\lambda > 0$ ist sie nach unten geöffnet, für $\lambda < 0$ nach oben.

Der Fall $\lambda < 0$ bildet das Einheitsintervall zumindest teilweise auf negative Zahlen ab und soll uns hier nicht weiter interessieren; die im folgenden vorgestellten Methoden erlauben es jedem, sich genau zu überlegen was dort passiert.

Wir beschränken uns also auf den Fall $\lambda > 0$. Nichtnegative Werte werden nur im Intervall $[0, 1]$ angenommen, in dem außerdem noch der Fixpunkt liegt; das Verhalten dort müssen wir uns also unbedingt anschauen.

Für negatives x_k ist $1 - x_k > 1$, also ist auch $x_{k+1} = \lambda x_k(1 - x_k)$ negativ. Wenn $\lambda(1-x_k)$ kleiner als eins ist (was nur für $\lambda < 1$ vorkommen kann), ist

x_{k+1} betragsmäßig kleiner als x_k und durch Wiederholung derselben Überlegung sieht man, daß die x_{k+j} dann eine monoton steigende (betragsmäßig fallende) Folge mit Grenzwert Null bilden. Wenn $\lambda(1-x_k)=1$ ist, haben wir einen Fixpunkt, und für $\lambda(1-x_k)>1$ gehen die x_{k+j} monoton gegen $-\infty$.

Damit ist die Situation bei für negative Werte klar: Ist $\lambda \geq 1$, sorgt ein negatives x_k dafür, daß von nun an alles monoton nach $-\infty$ geht; im Fall $0<\lambda<1$ gilt dasselbe, wenn x_k links vom (hier negativen) Fixpunkt $1-\frac{1}{\lambda}$ liegt, wohingegen alles monoton gegen Null geht, wenn x_k rechts davon liegt.

Nachdem die Situation für negative Werte klar ist, ist auch klar, was mit positiven Werten rechts der Eins passiert, denn für $x_k>1$ ist $x_{k+1}<0$, und ab dann geht es weiter wie im vorigen Abschnitt.

Bleibt also noch das Verhalten auf dem Einheitsintervall zu untersuchen. Wie wir oben gesehen haben, ist das Maximum von $\lambda x(1-x)$ dort gleich $\lambda/4$, das Einheitsintervall wird also für $0 \leq \lambda \leq 4$ in sich selbst abgebildet. Für $\lambda>4$ wird zumindest ein Teil der Werte auf Punkte rechts der Eins abgebildet und geht daher langfristig gegen $-\infty$. Schaut man sich die Situation etwas genauer an, sieht man, daß ein Teilintervall von $[0,1]$ auf Punkte rechts der Eins abgebildet wird; dessen Urbild, bestehend aus zwei weiteren Teilintervallen, wird nach zweimaliger Iteration dorthin abgebildet, *usw.;* eine genauere Analyse zeigt, daß fast alle Punkte schließlich aus dem Intervall hinausiteriert werden; was übrigbleibt ist eine fraktale Menge von Punkten, deren sämtliche Iterationen im Einheitsintervall bleiben. Deren genauere Struktur zu ergründen mag zwar mathematisch interessant sein, für Anwendungen mehrstufiger Prozesse aber ist sie uninteressant, denn

- erstens ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Punkt in dieser fraktalen Teilmenge liegt, bei Gleichverteilung auf dem Einheitsintervall gleich Null und
- zweitens hat man es in der Realität nie mit exakten reellen Zahlen zu tun; da schon die kleinse Störung aus der Teilmenge hinausführt, spielt sie also für Anwendungen keine Rolle: Dort wird jeder Prozeß gegen $-\infty$ gehen – was immer das in einer realen Anwendung bedeuten mag.

Damit ist also auch die Situation jenseits von $\lambda=4$ zumindest im wesentlichen geklärt; zu untersuchen bleiben die λ zwischen null und vier.

3. Stabile Fixpunkte und Zykeln

a) Die Fixpunkte der logistischen Gleichung

Beginnen wir mit $\lambda \in [0,1]$. Für $x_k \neq 0$ ist $1 - x_k < 1$, also

$$x_{k+1} = \lambda x_k(1 - x_k) < \lambda x_k \leq x_k \,,$$

d.h. alles geht schließlich gegen Null.

Für $\lambda > 1$ können wir nicht mehr so argumentieren; hier ist für $x_k < 1 - 1/\lambda$

$$x_{k+1} = \lambda x_k(1 - x_k) > \lambda x_k\,(1 - 1\lambda) = x_k \,,$$

für ein x_k in der Nähe des Nullpunkts ist also x_{k+1} *weiter* vom Nullpunkt entfernt als x_k. Damit ist Null zwar immer noch ein Fixpunkt, aber er hat für das dynamische Verhalten des Prozesses keine Bedeutung mehr: Schon die kleinste Störung des Gleichgewichts sorgt dafür, daß er sich bei den folgenden Iterationen von der Null wegbewegt. Wir nennen einen solchen Fixpunkt *abstoßend* oder *instabil.* Genauer:

Definition: $f : X \to X$ sei eine stetige Abbildung auf $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Fixpunkt* oder *Gleichgewichtspunkt,* wenn $f(x) = x$ ist. Ein Fixpunkt heißt *anziehend* oder *stabil,* wenn es eine Umgebung U von x gibt, so daß für jedes $y \in U$ die Folge $\left(f^{(k)}(y)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ der Iterierten gegen x konvergiert; er heißt *abstoßend* oder *instabil,* falls für alle $y \neq x$ aus einer Umgebung U von x der Abstand zwischen $f(y)$ und x größer ist als der zwischen x und y.

Lemma: $f : X \to X$ sei eine stetige Abbildung auf $X \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in X$ sei ein Fixpunkt.
a) Ist $|f'(x)| < 1$, so ist x stabil.
b) Ist $|f'(x)| > 1$, so ist x instabil.

Beweis: Mittelwertsatz der Differentialrechnung. ■

Bei der logistischen Gleichung ist $f'(x) = \lambda(1-2x)$, für $x = 0$ ist also $f'(0) = \lambda$, und in der Tat ist der Nullpunkt, wie wir uns überlegt haben, stabilt für $\lambda < 1$ und instabil für $\lambda > 1$. (Seine Stabilität für $\lambda = 1$ kann nicht über die erste Ableitung entschieden werden.) Für den zweiten Fixpunkt ist

$$x_0 = 1 - \frac{1}{\lambda}, \quad \text{also} \quad f'(x_0) = \lambda - 1 \,,$$

und dieser Wert ist für $1 < \lambda < 3$ betragsmäßig kleiner als eins; für $\lambda \in (1,3)$ haben wir also einen stabilen Fixpunkt bei $x_0 = 1 - 1/\lambda$. Für $\lambda > 3$ allerdings ist dieser Fixpunkt instabil; in diesem Bereich gibt es also, da auch Null instabil ist, überhaupt keinen stabilen Fixpunkt.

b) Bifurkationen

Um zu sehen, was hier passiert, lassen wir am besten einen Computer den Prozeß simulieren: Wir starten mit einem Wert x_0 aus dem Einheitsintervall und berechnen die weiteren x_k; in Abbildung eins sind für $2{,}9 \le \lambda \le 4$ jeweils die Punkte x_{1001} bis x_{3000} eingezeichnet. Wie man sieht, gibt es ab $\lambda = 3$ eine Zeitlang zwei Werte y_1 und y_2 für jedes λ, d.h. die x_k befinden sich für hinreichend große Werte von k allesamt in der Nähe eines dieser beiden Punkte.

Nachdem wir dies wissen, fällt es nicht schwer, es auch zu beweisen: Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &= f\big(f(x)\big) = \lambda^2 x(1-x)\big(1-\lambda x(1-x)\big) \\ &= -\lambda^3 x^4 + 2\lambda^3 x^3 - (\lambda^3 + \lambda^2)x^2 + \lambda^2 x \end{aligned}$$

und schauen nach deren Fixpunkten.

Abbildungen zwei und drei zeigen für $\lambda = 2\frac{3}{4}$ *bzw.* $\lambda = 3\frac{1}{4}$ den Graph von $f^{(2)}$, die Winkelhalbierende, und im Fixpunkt von f die Tangente an den Graphen. Da im Fixpunkt

$$\frac{d}{dx} f\big(f(x)\big) = f'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = f'(x)^2$$

ist, hat die Tangente für $\lambda < 3$ eine positive Steigung echt kleiner als eins, für $\lambda = 3$ ist die Tangente gleich der Winkelhalbierenden, und für $\lambda > 3$ ist sie steiler.

Wenn die Tangente aber steiler ist als die Winkelhalbierende, muß die Kurve $y = f^{(2)}(x)$ rechts vom Fixpunkt oberhalb der Winkelhalbierenden liegen; da $f^{(2)}(1) = f(0) = 0$ ist, muß es also rechts noch einen weiteren Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden geben. Ebenso muß es links noch einen geben, denn untermittelbar links vom Fixpunkt liegt die Kurve unterhalb der Winkelhalbierenden, während sie rechts von $x = 0$ wegen der Instabilität des Fixpunkts 0 oberhalb davon liegt. Also entstehen in dem Augenblick, in dem der Fixpunkt von f instabil wird, zwei neue Fixpunkte von $f^{(2)}$.

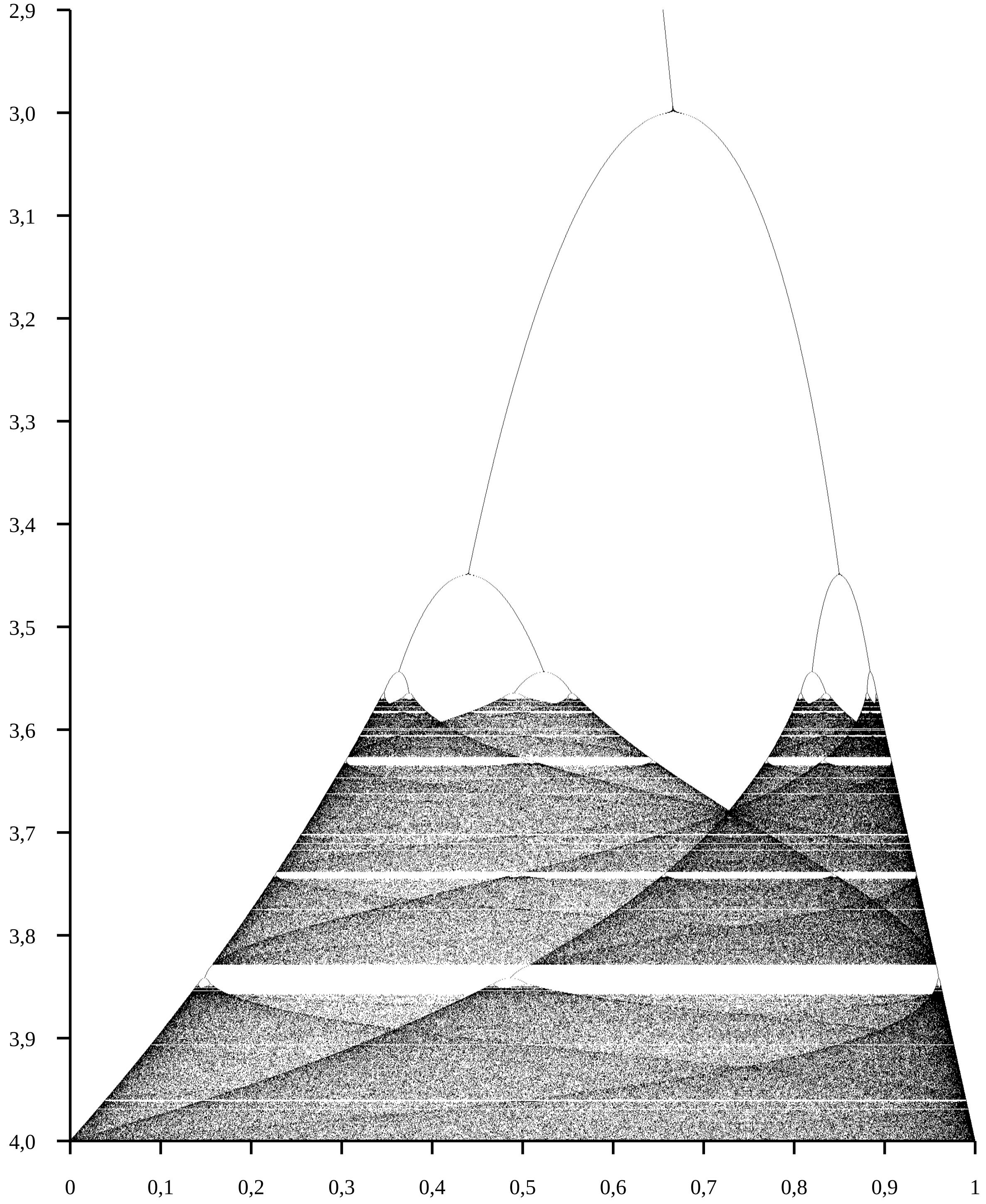

Abb. 1: Iteration der logistischen Gleichung

Auch rechnerisch läßt sich dies leicht nachvollziehen: Wir müssen uns die Lösungen der Gleichung $f^{(2)}(x) = x$ betrachten. Unter diesen Lösungen sind insbesondere auch die bekannten beiden Fixpunkte von f; da uns diese nicht

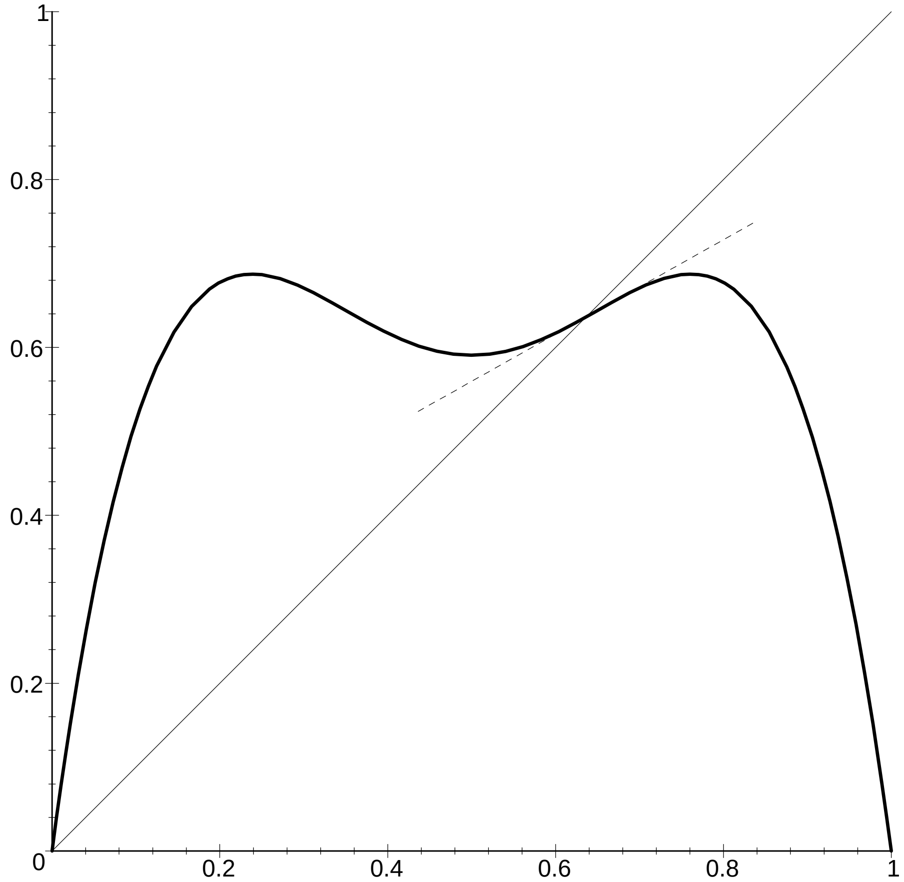

Abb. 2: $f^{(2)}(x)$ für $\lambda = 2{,}75$

mehr interessieren, betrachten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{f^{(2)}(x) - x}{f(x) - x} &= \frac{-\lambda^3 x^4 + 2\lambda^3 x^3 - (\lambda^3 + \lambda^2)x^2 + (\lambda^2 - 1)x}{-\lambda^2 x + (\lambda - 1)x} \\ &= \lambda^2 x^2 - (\lambda^2 + \lambda)x + \lambda + 1 = 0\end{aligned}$$

mit den beiden Lösungen

$$y_{1/2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\lambda} \pm \frac{\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{\lambda}\right) .$$

Nach Konstruktion ist $f(y_1) = y_2$ und $f(y_2) = y_1$, wir haben also einen *Zweierzyklus.* Dieser existiert für alle $\lambda \geq 3$, denn unter der Wurzel steht $(\lambda + 1)(\lambda - 3)$, er spielt aber, wenn wir der Computersimulation glauben dürfen, ab etwa 3,45 keine Rolle mehr.

Wie kommt das? Da ein Zweierzyklus einfach ein Fixpunkt von $f^{(2)}$ ist,

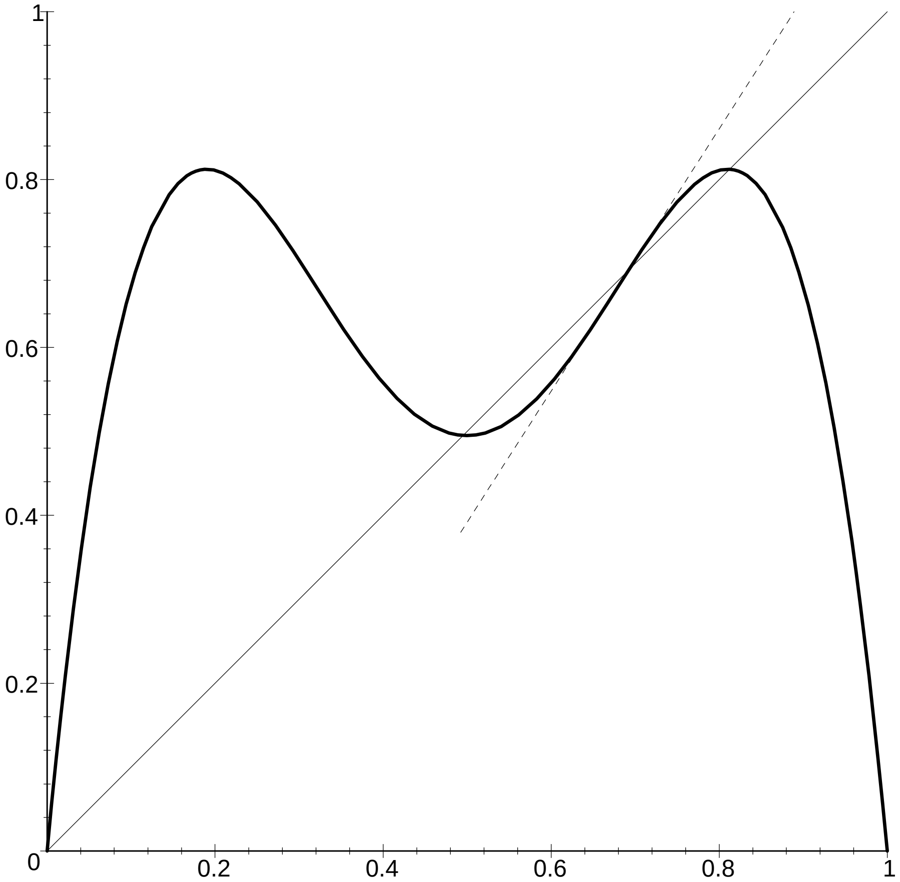

Abb. 3: $f^{(2)}(x)$ für $\lambda = 3{,}25$

können wir auch hier von Stabilität reden: Wir nennen den Zyklus stabil *bzw.* instabil, wenn der Fixpunkt von $f^{(2)}$ die entsprechende Eigenschaft hat. Die Ableitung von $f^{(2)}$ in y_1 (und in y_2) ist

$$\frac{df^{(2)}}{dx}(y_1) = f'\big(f(y_1)\big) \cdot f'(y_1) = f'(y_2) \cdot f'(y_1);$$

eine kurze Rechnung zeigt, daß

$$\frac{df^{(2)}}{dx}(y_1) = -\lambda^2 + 2\lambda + 4$$

ist. Dies ist im uns interessierenden Bereich eine monoton fallende Funktion von λ, und bei $\lambda = 3$ hat sie natürlich den Wert eins. Der Zweierzyklus bleibt daher so lange stabil, bis

$$-\lambda^2 + 2\lambda + 4 = -1 \quad \text{oder} \quad \lambda = \sqrt{6} + 1 \approx 3{,}449489743$$

ist.

Was passiert danach? Wenn wir der Computersimulation in Abbildung eins glauben, sollte jetzt ein Viererzyklus entstehen. Wir müssen also die Gleichung $f^{(4)}(x) = x$ betrachten – eine Polynomgleichung vom Grad $2^4 = 16$. Zwar können wir wieder, da uns Fixpunkte und der Zweierzyklus nicht mehr interessieren, die Gleichung $f^{(2)}(x) - x$ ausdivieren, aber dann bleibt immer noch ein Polynom zwölften Grades übrig, von dessen Nullstellen vier Stück im Intervall $[0, 1]$ liegen sollten. Die zu finden, ist offensichtlich nicht ganz einfach, und wir wollen uns diese Rechnung lieber nicht antun.

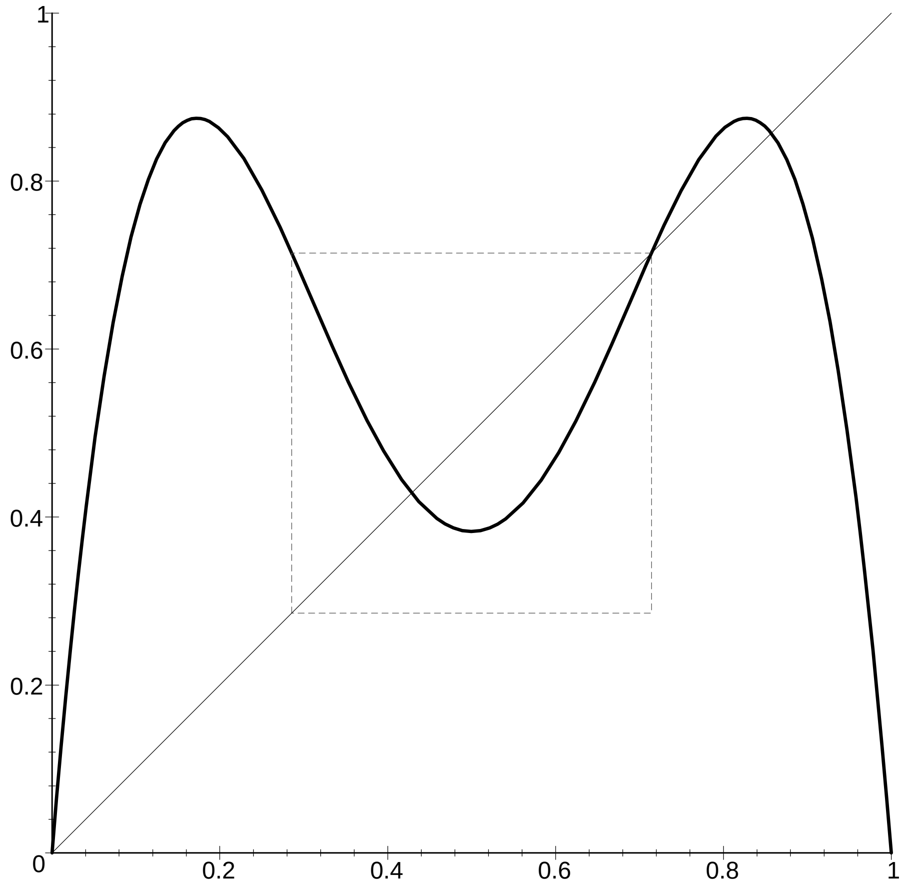

Abb. 4: $f^{(2)}(x)$ für $\lambda = 3{,}5$ mit invariantem Quadrat

Glücklicherweise zeigt die Geometrie eine Möglichkeit, auch ohne Rechnung zu verstehen, was passiert: Abbildung vier zeigt den Graphen von $f^{(2)}$ für $\lambda = 3{,}5$, im Gegensatz zu Abbildung drei ist hier aber noch zusätzlich ein Quadrat eingezeichnet, das genau wie das Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$, in dem der Graph von f liegt, den Mittelpunkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ hat. (Die linke untere Ecke läßt sich berechnen als einer jener Punkte (a, a), für den a Lösung der Gleichung $f^{(2)}(a) = 1 - a$ ist.) Vergrößert man dieses Quadrat auf volle Größe und spiegelt am Zentrum (oder an der Geraden $y = \frac{1}{2}$), so erhält man Abbildung fünf, die fast genauso aussieht wie der Graph der Funktion $y = f(x)$ für ein gewisses λ.

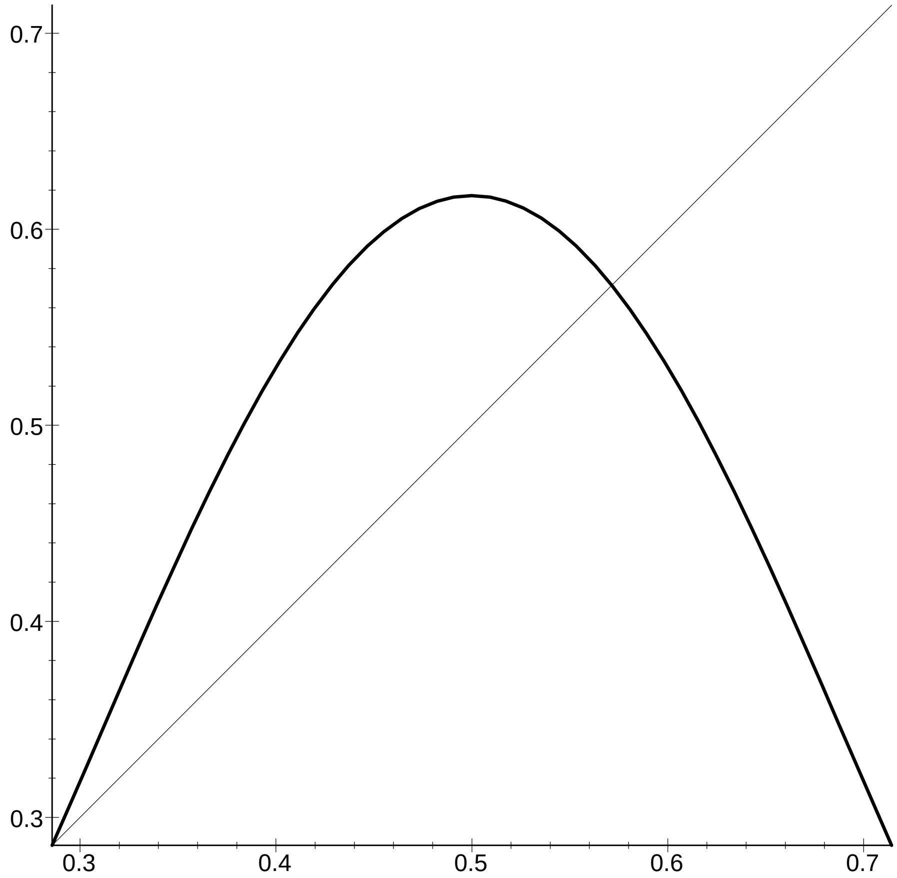

Abb. 5: $1 - f^{(2)}(x)$ für $\lambda = 3{,}5$ reskaliert auf das invariante Quadrat

Entsprechend kann man mit $f^{(4)}(x)$ verfahren; das Ergebnis ist in Abbildung sechs zu sehen und sieht fast genauso aus, wie der Graph in Abbildung vier.

Durch die Spiegelung und Reskalierung können wir also aus dem Graphen von $f^{(2)}$ einen Teil extrahieren, der sich qualitativ genauso verhält wie der Graph von f, und aus dem von $f^{(4)}$ einen Teil, der so aussieht wie der Graph von $f^{(2)}$. Auf diese Situation können wir nun das geometrische Argument von oben anwenden und erhalten aus dem Fixpunkt im kleinen

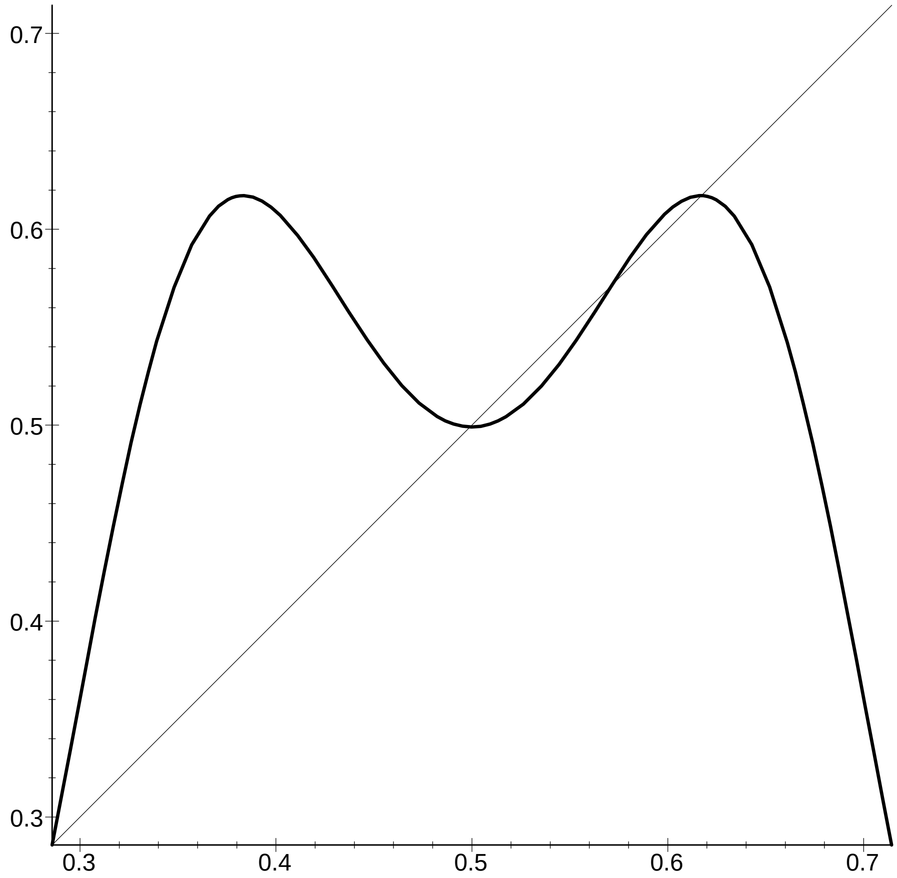

Abb. 6: $1 - f^{(4)}(x)$ für $\lambda = 3{,}5$ reskaliert auf das invariante Quadrat

Quadrat einen Zweierzyklus dort, und der entspricht im großen Quadrat einem Viererzyklus.

Auf die gleiche Weise können wir weiter argumentieren und erhalten immer neue Periodenverdoppelungen, wobei nacheinander alle Zweierpotenzen als Periodenlängen auftreten. Die Paramterintervalle, in denen diese Zykeln stabil sind, werden immer kleiner, bis schließlich bei etwa $\lambda_\infty \approx 3{,}5699456$ alle diese Zykel instabil geworden sind.

c) Universalität

Schaut man sich die Parameterwerte, bei denen sich die Periodenlänge verdoppelt, genauer an, sieht man, daß sie sich immer besser durch eine geometrische Reihe mit Quotient

$$\delta \approx 4{,}6692016091\,0299067185\,3203820466\,2016172581\,8557747576$$

annähern läßt.

Diese Tatsache wurde 1979 experimentell von dem amerikanischen Physiker MITCHELL J. FEIGENBAUM [**F**] entdeckt und heißt deshalb FEIGENBAUM-Universalität. Sie gilt nicht nur für die logistische Gleichung, sondern für alle Prozesse, die das Einheitsintervall auf sich selbst abbilden und genau ein Maximum haben, also beispielsweise auch für die Familie von Abbildungen

$$x \mapsto \lambda \sin(\pi x)$$

mit $0 \leq \lambda \leq 1$ und ähnliche.

Einen ersten Beweis für diese Universalität gab der amerikanische Mathematiker OSKAR E. LANFORD III 1983 [**L**]; der Beweis beruht auf umfangreichen Rechnungen, die per Computer durchgeführt werden mußten. Seit rund zwei Jahren gibt es auch einen inhaltlich-mathematischen Beweis von CURTIS T. MCMULLEN, [**MM**] der das Problem unter dem Gesichtspunkt der komplexen Dynamik betrachtete, d.h. also die entsprechende Abbildung auf der RIEMANNschen Zahlenkugel untersuchte, und der dabei auch interessante Zusammenhänge mit der Geometrie dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten fand. Im August wurde er unter anderem für diese Arbeiten auf dem Internationalen Mathematikerkongreß mit der FIELDS-Medaille ausgezeichnet, dem „Nobelpreis" der Mathematik. Schließlich gibt es noch eine stark vereinfachte Beweisskizze des Universalitätsbeweises, entstanden im Rahmen einer Lehrerfortbildungsveranstaltung der ETH Zürich, in [**KS**].

Der Grundgedanke ist bei allen Ansätzen derselbe: Man muß den Übergang von Abbildung vier zu Abbildung fünf verstehen. Dieser kann beschrieben werden durch einen „Verdopplungsoperator" $g \mapsto Tg$, der jederFunktion auf dem Einheitsintervall die geeignet reskalierte Funktion $g \circ g$ zuordnet:

$$Tg(x) = h^{-1}\Big(g\Big(g\big(h(x)\big)\Big)\Big),$$

wobei

$$h\colon [c, 1-c] \to [0, 1]$$

die Streckung mit Zentrum $1/2$ ist. Der Streckungsfaktor ergibt sich experimentell zu

$$a \approx 2{,}5029078750\,9589282228\,3902873218\,2157863812\,7137672715\,,$$

d.h. konkret ist

$$h(x) = a\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} \approx 0{,}300232358907\,.$$

Diesen Renormalisierungsoperator betrachte man auf dem Raum *aller* stetig differenzierbarer Funktionen auf dem Einheitsintervall und suche nach einer Funktion, die unter diesem Operator festbleibt, für die also $Tg = g$ ist. Einen Kandidaten für eine solche Funktion bekommt man in der üblichen Weise, indem man den Limes der iterierten $T^j g$ betrachtet; das Problem besteht darin, zu zeigen, daß diese Folge auch tatsächlich konvergiert.

Falls man dieses Problem gelöst hat, kann als nächstes der Operator g in der Nähe des Fixpunktes linearisiert werden, d.h. er kann durch seine (unendlichdimensionale) Abbildungsmatrix ersetzt werden. Es zeigt sich, daß mit einer einzigen Ausnahme alle Eigenwerte einen Betrag kleiner Eins haben; die Ausnahme ist der oben erwähnte Wert δ.

Betrachten wir nun die Familie der Funktionen

$$f_\lambda : x \mapsto \lambda x(1-x) \; .$$

Wenn λ variiert, liegen diese auf einer Kurve im Raum der stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Einheitsintervall, und diese Kurve geht bei λ_∞ durch den Fixpunkt von T. Wenn wir hinreichend nahe beim Fixpunkt sind, können wir die Kurve durch eine Gerade approximieren, und dort liegen insbesondere auch die Funktionen zu jenen Parameterwerten λ_n, bei denen der stabile Zyklus mit 2^n Elementen instabil wird, wobei ein stabiler Zyklus aus 2^{n+1} Elementen entsteht. Diese Funktionen gehen durch Anwendung von T auseinander hervor:

$$f_{\lambda_{n-1}} = Tf_{\lambda_n} \; .$$

Falls man nun zeigen kann, daß die „Gerade“, auf der die f_λ liegen, nicht senkrecht auf dem Eigenraum zum Eigenwert δ liegt, sagt, naiv betrachtet, der Strahlensatz, daß die $\lambda_n - \lambda_\infty$ geometrisch mit Faktor δ abnehmen. Dies läßt sich präzise machen: Das sogenannte λ-Lemma ist gerade die Art von unendlichdimensionalem Strahlensatz, den man hier braucht.

3. Chaotisches Verhalten

Für $\lambda > \lambda_\infty$ zeigt Abbildung eins, daß sich hier das Bild völlig geändert hat: Nun gibt es ganze Teilintervalle, in denen sich die höheren Iterierten bewegen können. Dazwischen sind aber immer wieder Regionen zu sehen, in denen stabile Zykel auftreten, die Situation ist also etwas unübersichtlich.

a) Der Fall $\lambda = 4$

Am einfachsten zu verstehen ist das Ende des interessanten λ-Intervalls, der Fall $\lambda = 4$; wir betrachten also den Prozeß

$$x_{k+1} = 4x_k(1 - x_k) .$$

Da alle Werte x_k zwischen null und eins liegen, gibt es zu jedem Wert x_k einen Winkel α_k zwischen 0° und 90°, so daß $x_k = \sin^2 \alpha_k$ ist. Nach den üblichen Rechenregeln für trigonometrische Funktionen ist

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 4x_k(1 - x_k) = 4\sin^2 \alpha_k(1 - \sin^2 \alpha_k) \\ &= 4\sin^2 \alpha_k \cos^2 \alpha_k = (2\sin \alpha_k \cos \alpha_k)^2 \\ &= \sin^2(2\alpha_k) , \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Additionsregel für den Sinus folgt:

$$\sin(2\alpha_k) = \sin(\alpha_k + \alpha_k) = 2\sin \alpha_k \cos \alpha_k .$$

Somit ist $x_{k+1} = \sin^2 \alpha_{k+1} = \sin^2(2\alpha_k)$. Daraus folgt allerdings noch nicht, daß $\alpha_{k+1} = 2\alpha_k$ wäre, denn α_{k+1} soll ja zwischen 0° und 90° liegen. Nun ist aber $\sin(180° - 2\alpha_k) = -\sin(2\alpha_k)$, die Quadrate sind also gleich, und mindestens einer der beiden Winkel $2\alpha_k$ und $180° - 2\alpha_k$ liegt zwischen 0° und 90°. Damit ist

$$\alpha_{k+1} = \begin{cases} 2\alpha_k & \text{falls} \quad 0° \le \alpha_k \le 45° \\ 180° - 2\alpha_k & \text{falls } 45° \le \alpha_k \le 90° . \end{cases}$$

Graphisch ist der Zusammenhang zwischen α_k und α_{k+1} in Abbildung sieben dargestellt.

α_{k+1} durchläuft also bereits den gesamten Bereich von 0° bis 90°, wenn α_k nur zwischen 0° und 45° oder zwischen 45° und 90° variiert. Etwaige Fehler von α_k werden somit in jedem Schritt verdoppelt, womit klar ist, daß kleine Fehler der Ausgangswerte schon nach wenigen Schritten zu gewaltigen Störungen anwachsen: Die Folge der α_k und damit auch die der $x_k = \sin^2 \alpha_k$ ist also in der Tat chaotisch, wenn man diese extreme Sensitivität gegenüber Störungen der Anfangswerte als Definition für Chaotizität nimmt. (Es gibt viele, nicht dazu äquivalente Alternativen.)

Anschaulich wird dies besonders klar, wenn man den Zusammenhang zwischen α_k und höheren Iterierten, etwa α_{k+3}, aufzeichnet: Da α_{k+1} das Einheitsintervall *zweimal* durchläuft, wenn α_k dies einmal tut, muß α_{k+2}

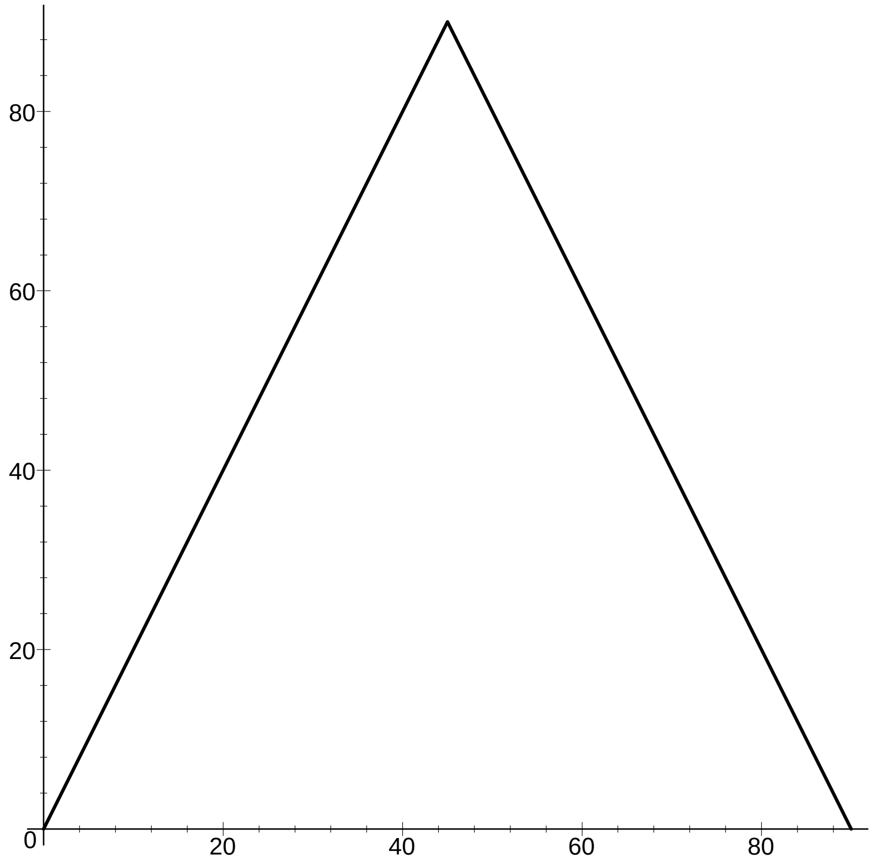

Abb. 7: Der Zusammenhang zwischen α_k und α_{k+1}

das Intervall *viermal* durchlaufen, und zwar je zweimal vorwärts und rückwärts, und α_{k+1} muß es sogar achtmal durchlaufen. Wir erhalten also die in Abbildung acht dargestellten vier Zacken anstelle des einen Zacken von Abbildung sieben.

Natürlich hängt dabei der Wert von α_{k+3} nicht davon ab, unter *welchem* der Zacken α_k liegt, sondern nur davon, wo es *relativ zum Beginn* des Zackens liegt. Daraus läßt sich ein quantitatives Maß für das chaotische Verhalten der Zeitreihe bestimmen:

Schreiben wir $\alpha_k = \theta_k \cdot 90°$ mit $0 \le \theta_k \le 1$, so ist

$$\theta_{k+1} = \begin{cases} 2\theta_k & \text{falls } 0 \le \theta_k \le \frac{1}{2} \\ 2 - 2\theta_k & \text{falls } \frac{1}{2} \le \theta_k \le 1 \,. \end{cases}$$

Graphisch sieht der Zusammenhang zwischen θ_k und θ_{k+1} oder θ_{k+3} *usw.* genauso aus wie der zwischen den entsprechenden αs, nur daß die Achsen anders beschriftet sind.

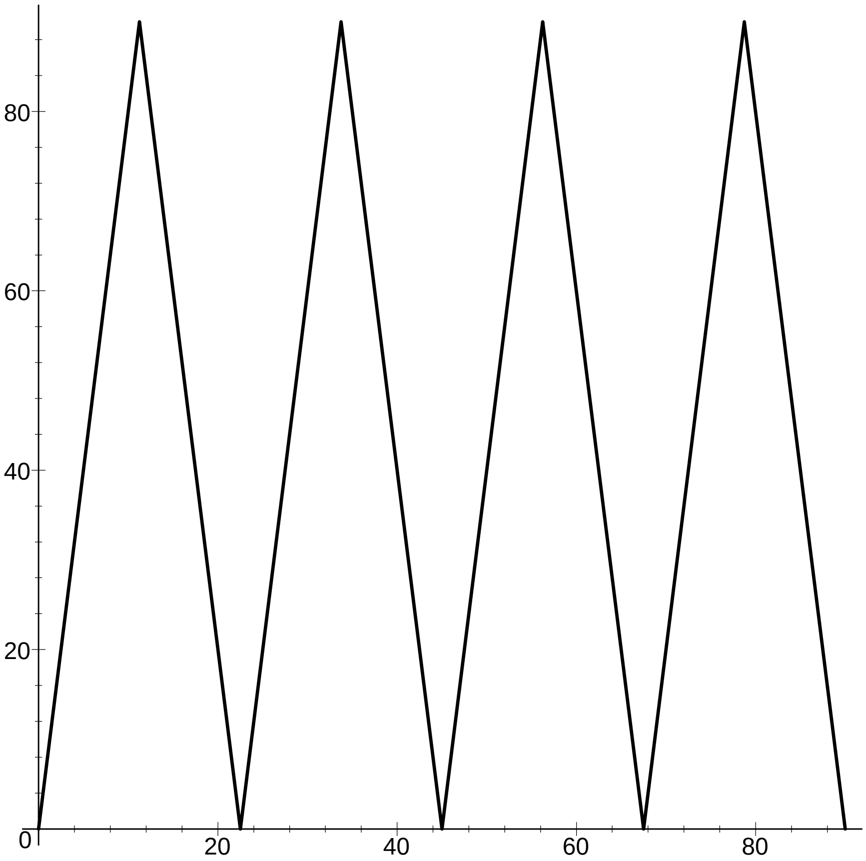

Abb. 8: Der Zusammenhang zwischen α_k und α_{k+3}

Als nächstes schreiben wir θ_k im *Zweiersystem* als

$$\theta_k = (0, b_1 b_2 b_3 \ldots)_2 = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{4} + \frac{b_3}{8} + \cdots .$$

In dieser Darstellung ist $\theta_k < \frac{1}{2}$ genau dann, wenn die erste Ziffer $b_1 = 0$ ist; die erste Binärziffer von θ_k gibt also an, ob α_{k+2} unter dem ersten oder dem zweiten der beiden Zacken liegt, und die restlichen Ziffern geben an, wo es relativ zum Beginn des Zackens liegt. α_{k+2} ist somit unabhängig von der ersten Binärziffer von θ_k, es hängt nur ab von der zweiten und den dahinter stehenden Ziffern. Entsprechend überlegt man sich leicht, daß α_{k+3} nur von den Binärziffern ab der dritten abhängt, α_{k+4} nur von denen ab der vierten *usw.*

Bei einer numerischen Simulation muß man notgedrungen mit einer festen Anzahl N von Binärziffern rechnen; von θ_1 sind also N Ziffern bekannt, wobei der berechnete Wert von α_2 nur von den $N-1$ letzten und der von α_3 nur von den $N-2$ letzten abhängt *usw.* Aus der Kenntnis des berechneten Werts von α_2 lassen sich also nur noch $N-1$ der Ziffern von θ_1 rekonstruieren, aus der von α_3 nur noch $N-2$ *usw.* Mit anderen Worten: *Wir verlieren pro Iteration eine der Binärziffern von* θ_1, bis schließlich nach N Iterationen alle Ziffern aufgebraucht sind und das weitere Verhalten des Systems nur noch von der Rundungsfunktion des Computers abhängt.

Als Beispiel sei hier der Wert x_{100} angegeben, berechnet auf verschiedenen Computern zum Ausgangswert $x_1 = 0{,}123456789$. Die Ergebnisse sind:

Rechner	*Ergebnis*
SHARP PC-1403	0,5014489803
PC/XT	0,7724279399
Atari ST	0,6516888142
HP9000/705	0,3680003583
IBM 4381-P12	0,7954374552
IBM 4381-P12*)	0,5657687146
KSR1	0,9815497216

*) *beim Rechnen mit doppelter Genauigkeit*

(Der Grund für die vielen alten Computer in dieser Liste liegt darin, daß fast alle neueren Computer Arithmetik nach dem IEEE-Standard implementiert haben und somit dasselbe Ergebnis liefern. Richtig wird dieses dadurch natürlich nicht.)

Da $2^{10} = 1024 \approx 1000 = 10^3$ ist, entsprechen *zehn* Binärstellen etwa *drei* Dezimalstellen, in Dezimalstellen ausgedrückt verlieren wir daher alle zehn Iterationen drei Stellen, nach hundert Iterationen also etwa dreißig – falls wir θ_1 überhaupt mit dieser Genauigkeit kannten.

Für die ursprünglich betrachtete Folge der

$$x_k = \sin^2 \alpha_k = \sin^2(\theta_k 90^\circ)$$

sollte in etwa dasselbe gelten; da keiner der verwendeten Computer auch nur annähernd mit dreißigstelliger Genauigkeit rechnete, ist klar, daß die für x_{100} berechneten Werte in der Tat nur vom Computer abhängen, nicht aber vom tatsächlichen, mathematisch korrekten Wert.

Dieser korrekte Wert läßt sich natürlich trotzdem mit beliebiger vorgegebener Genauigkeit berechnen: Nachdem wir wissen, daß im Verlauf der

Rechnung etwa dreißig Dezimalstellen verlorengehen, müssen wir nur mit so vielen Stellen rechnen, daß nach diesem Verlust immer noch genügend viele geltende Ziffern übrigbleiben; für zehnstellige Genauigkeit des Endergebnisses sollten wir also die Rechnung mit mindestes vierzigstelliger Genauigkeit durchführen. Da *a priori* nicht ganz klar ist, wie sich der Genauigkeitsverlust der α_k über die Sinusfunktion auf die x_k überträgt, und um noch etwas Spielraum für Rundungsfehler zu erlauben, empfiehlt es sich, zur Vorsicht lieber etwas genauer zu rechnen: Mit hundert geltenden Ziffern gerechnet erhält man

$$x_{100} \approx 0{,}01831206989611762 6026\,.$$

Auch die chaotische Abhängigkeit vom Ausgangswert läßt sich nun leicht demonstrieren: Startet man statt mit $x_1 = 0{,}123456789$ mit dem nur geringfügig veränderten Wert $x_1 = 0{,}1234567891$, so ergibt die gleiche Rechnung

$$x_{100} \approx 0{,}95676417030637668 0816\,,$$

der Wert liegt also am anderen Ende des Einheitsintervalls. Wiederholt man die beiden Rechnungen zur Kontrolle mit tausendstelliger Genauigkeit, erhält man Ergebnisse, die sich um etwa anderthalb Einheiten *bzw.* eine drittel Einheit der 74. Stelle von denen unterscheiden, die mit hundertstelliger Genauigkeit berechnet wurden; der tatsächliche Genauigkeitsverlust liegt in diesem Beispiel also bei 26 bis 27 Ziffern.

b) Das invariante Maß

Schreiben wir wieder $x_k = \sin^2 \alpha_k$, so sind die α_k gleichverteilt im Intervall zwischen $0°$ und $90°$, falls wir entweder von der (etwas dubiosen) mathematischen Annahme ausgehen, daß die Binärziffern von $\theta_k = \alpha_k/90°$ gleichverteilt sind, oder von der (realistischen) physikalischen Annahme, daß in jedem Iterationsschritt ein kleiner zufälliger Fehler auftritt. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein α_k zwischen den beiden Winkeln β und γ aus dem Intervall von $0°$ und $90°$ liegt, ist also proportional zur Länge des Intervalls zwischen β und γ; da sie für das gesamte Intervall eins sein muß, ist sie gleich $(\gamma - \beta)/90°$.

Mit nur geringfügig größerem mathematischem Aufwand läßt sich auch die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, daß $x_k = \sin^2 \alpha_k$ zwischen zwei Zahlen b und c aus dem Intervall von 0 bis 1 liegt: Sie ist wieder $(\gamma - \beta)/90°$, wobei γ jener Winkel zwischen $0°$ und $90°$ ist, für den $\sin^2 \gamma = c$ ist, und entsprechend ist $\sin^2 \beta = b$. Mit dem Arkussinus, der Umkehrfunktion des

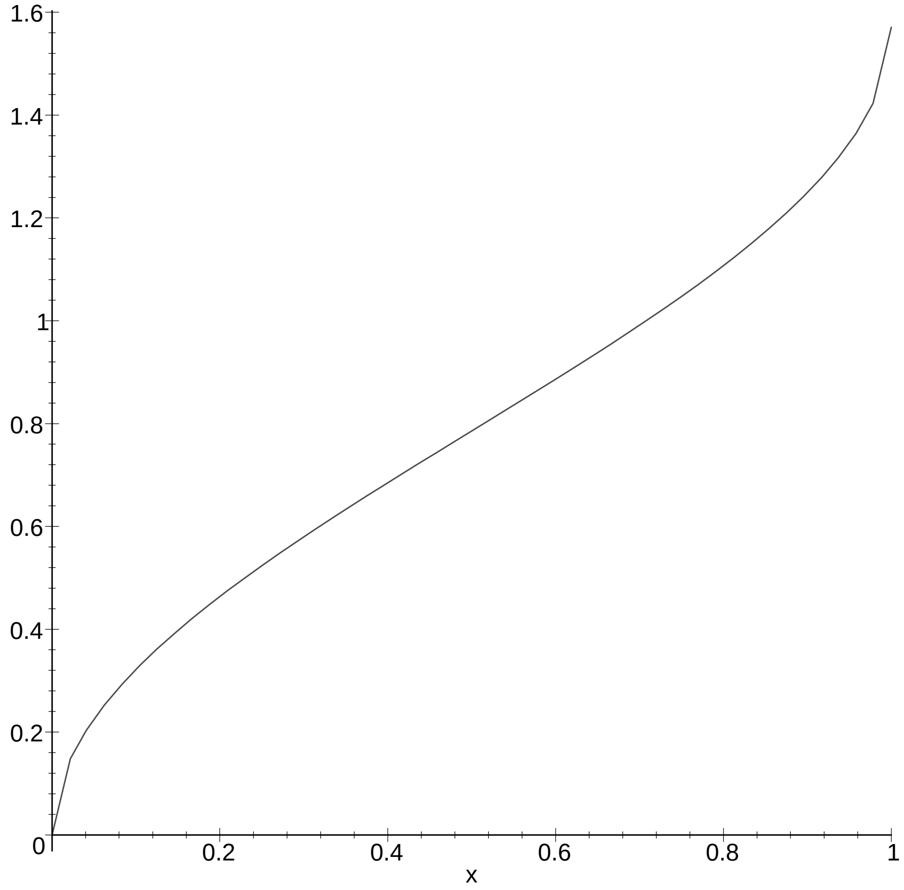

Abb. 9: Der Arkussinus der Wurzel

Sinus im Intervall von $0°$ bis $90°$, läßt sich dies nach β *bzw.* γ auflösen: $\beta = \arcsin\sqrt{b}$ und $\gamma = \arcsin\sqrt{c}$. Also liegt x_k mit Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\arcsin\sqrt{b} - \arcsin\sqrt{c}}{90°}$$

zwischen b und c. Die Funktion $\alpha = \arcsin\sqrt{x}$ ist in Abbildung neun aufgezeichnet. Wie man sieht, wird sie zu den Intervallenden hin sehr steil, während sie in der Intervallmitte eher flach verläuft; Somit liegen die x_k häufiger in der Nähe der Intervallenden als in der Nähe der Intervallmitte, und für jedes Teilintervall läßt sich genau sagen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein x_k dort liegt.

c) Verhalten für andere Parameterwerte

Es ist eine ganz große Ausnahme, daß man Chaos so einfach nachweisen kann wie oben im Fall $\lambda = 4$: Für viele Systeme ist entweder immer noch nicht abschließend geklärt, ob sie wirklich chaotisch sind, oder aber es konnte nur mit großem Aufwand geklärt werden.

Im vorliegenden Fall findet man die meisten bislang bekannten Ergebnisse in [**J**], einige neuere auch in [**MM**]. Die wesentlichen Punkte sind

- Die Menge aller Werte, für die es – wie gerade im Fall $\lambda = 4$ – ein invariantes Maß gibt, hat positives LEBESGUE-Maß.
- Die Menge aller Werte, für die es einen stabilen Zyklus gibt, ist dicht.

Beides zusammen macht klar, daß die Situation nicht einfach sein kann.

4. Literatur

[**C**] P. CVITANOVIČ [Hrsg.]: Universality in chaos, *Bristol und New York,* ^{2}*1989*

[**F**] M.J. FEIGENBAUM: The universal metric properties of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.* **21** (1979), 669–706 *(auch nachgedruckt in* [**C**]

[**G**] J.-M. GRANDMONT: On endogenous competitive business cycles, *Econometrica* **53** (1985), 995–1045

[**J**] M.V. JAKOBSON: Stochastic behavior above Feigenbaum's parameter value, *in* Dynamical Systems and Ergodic Theory, *Banach Center Publications* **23** (1989), 465–474

[**KS**] U. KIRCHGRABER, N. SIGRIST: Feigenbaum-Universalität: Beschreibung und Beweisskizze, *Mathematische Semesterberichte* **45** (1998), 39–59

[**L**] O.E. LANFORD III: A computer-assisted proof og the Feigenbaum conjectures, *Bull. American Math. Soc.* **6** (1982), 427–434 *(auch nachgedruckt in* [**C**]

[**M**] R.M. MAY: Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* **261** (1976), 459–467 *(auch nachgedruckt in* [**C**]

[**MO**] R.M. MAY, G.F. OSTER: Bifurcations and dynamic complexity in simple ecological models, *American Naturalist* **110** (1976), 573–599

[**MM**] C. MCMULLEN: Renormalization and 3-manifolds with fiber over the circle, *Annals of Math. Studies* **142**, Princeton 1996

Wolfgang K. Seiler
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Mannheim
68131 Mannheim

seiler@math.uni-mannheim.de