Optimierung

Die Suche nach dem besten Weg

Schülerseminar an der Universität Mannheim
vom 6.–9. September 2000

Wolfgang K. Seiler

Geschichte der Optimierung

WOLFGANG K. SEILER
Mathematisches Institut der
Universität Mannheim
68131 Mannheim

seiler@math.uni-mannheim.de

Kapitel 0
Geschichtliche Einführung

Optimierung, die Suche nach der *besten* Lösung (in welchem Sinne auch immer) dürfte wohl mindestens so alt sein wie die Menschheit. Wie wir gleich sehen werden, kann man sogar die Entstehung des Lebens auf der Erde durch einen (stochastischen) Optimierungsalgorithmus beschreiben – auch wenn möglicherweise nicht jedes Lebewesen auf der Erde optimal ist.

Optimierung als mathematisches Prinzip gibt es, wie übermorgen ein Beispiel in den Übungen zeigen wird, schon seit mehr als zwei Jahrtausenden. Heute in der geschichtlichen Einführung soll es allerdings nur um die Teile der Optimierung gehen, die jenseits des Schulstoffs liegen und die außerdem wenigstens am Rande mit den Vorträgen dieses Seminars zu tun haben.

§1: Optimierung im Eindimensionalen

Kurvendiskussion ist ein klassischer Bestandteil des Mathematikabiturs und wird daher wohl jedem entweder bereits bekannt sein oder bald bekannt werden. Einer ihrer wesentlichen Teile besteht darin, zu einer für $a \leq x \leq b$ definierten Funktion f die (absoluten und relativen) Maxima und Minima zu finden. Für eine *differenzierbare* Funktion f gibt es ein einfaches Kriterium, um Kandidaten für Extrema zu finden: Falls f in einem von a und b verschiedenen Punkt x ein Extremum hat, muß dort die Ableitung $f'(x)$ verschwinden.

Dieses Resultat veröffentlichete LEIBNIZ im Oktober 1684 unter dem Titel *Nova methodvs pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qui-*

nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus in der *Acta Eruditorum.*

BARON GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ (1646–1716) gilt als der letzte Universalgelehrte, der das gesamte Wissen seiner Zeit überblickte. In der Mathematik ist er vor allem berühmt durch die Entwicklung der Infinitesimalrechnung (bezüglich derer es einen langen Prioritätsstreit mit NEWTON gab); Bezeichnungen wie $\frac{dy}{dx}$ und $\int f(x)\,dx$ gehen auf ihn zurück. Durch seine Begründung der symbolischen Logik legte er auch einen wesentlichen Grundstein der späteren Informatik. Weitere Arbeiten befassen sich mit den Naturwissenschaften und der Technik, der Philosophie, Theologie und der Geschichte.

§2: Variationsrechnung

Zwölf Jahre später kam eine andere Art von Optimierungsproblemen auf: Nun war nicht mehr zu einer festen Funktion f ein Punkt x gesucht, in dem f maximal oder minimal wird, sondern unter *allen* Funktionen war diejenige gesucht, die einen gewissen Ausdruck (meist ein bestimmtes Integral) minimiert.

Im siebzehnten Jahrhundert war es oft üblich, daß ein Wissenschaftler seine Resultate nicht veröffentlichte, sondern sie der gelehrten Welt als Aufgabe stellte; wenn am Ende kein anderer die Lösung fand, konnte er sich als der Größte fühlen, was besonders dann sehr angenehm war, wenn sich einige seiner liebsten Feinde unter den Angesprochenen befanden. (Ein Superstar wie LEIBNIZ hatte so etwas natürlich nicht nötig; er war auch so als der Größte anerkannt.)

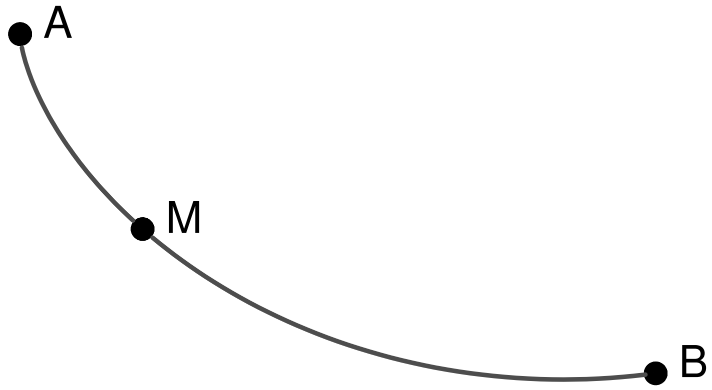
Besonders eng miteinander verfeindet waren die beiden Brüder JOHANN BERNOULLI (1667–1748, *links*) und JAKOB BERNOULLI (1654–1705) aus der berühmten Schweizer Mathematikerdynastie, und so ist es kein

Wunder, daß diese beiden ständig Probleme veröffentlichten, die in erster Linie an den jeweils anderen gerichtet waren. Im Juni 1696 veröffentlichte JOHANN, der zwölf Jahre jüngere Bruder, in der *Acta eruditorum* das folgende Problem:

In einer vertikalen Ebene seien zwei Punkte A und B gegeben. Man finde diejenige Kurve, der ein Punkt M auf dem Weg AMB folgen muß, so daß er, wenn er bei A startet den Punkt B möglichst schnell erreicht durch seine eigenen Schwerkraft.

Er fügt noch hinzu, daß diese Kurve interessanterweise *keine* Gerade sei.

Im Maiheft 1697 der *Acta eruditorum* sind sechs Lösungen zu finden: Außer den beiden BERNOULLIS hatten auch noch LEIBNIZ, NEWTON, DE L'HÔPITAL und TSCHIRNHAUS Lösungen vorgelegt. Außer DE L'HÔPITAL hatten alle die Zykloide als Lösung gefunden. Diese beschreibt die Bahn eines Punktes auf einer Kreisscheibe, wenn diese entlang einer Geraden rollt.



Eine Zykloide als Brachystrochrone

Am interessantesten für die weitere Geschichte der Optimierung war die Lösung des älteren Bruders JAKOB, der erkannt hatte, daß die Extremaleigenschaft der Brachystrochrone genau dann *global* gilt, wenn

sie in jedem Punkt *infinitesimal* gilt. Darauf aufbauend veröffentlichte EULER 1744 eine Methode, mit der man alle Arten solcher *Variationsprobleme* behandeln kann.

LEONHARD EULER (1707–1783) wurde in Basel geboren und ging auch dort zur Schule und, im Alter von 14 Jahren, zur Universität. Dort legte er zwei Jahre später die Magisterprüfung in Philosophie ab und begann mit dem Studium der Theologie; daneben hatte er sich seit Beginn seines Studium unter Anleitung von JOHANN BERNOULLI mit Mathematik beschäftigt. 1726 beendete er sein Studium in Basel und bekam eine Stelle an der Petersburger Akademie der Wissenschaften, die er 1727 antrat. Auf Einladung FRIEDRICHS DES GROSSEN wechselte er 1741 an die preußische Akademie der Wissenschaften; nachdem sich das Verhältnis zwischen den beiden dramatisch verschlechtert hatte, kehrte er 1766 nach St. Petersburg zurück. Im gleichen Jahr erblindete er vollständig; trotzdem schrieb er rund die Hälfte seiner zahlreichen Arbeiten (73 Bände) danach. Sie enthalten bedeutende Beiträge zu vielen Gebieten der Mathematik, Physik, Astronomie und Kartographie.

Die EULERsche Methode wurde weiter ausgebaut von LAGRANGE; für uns wichtiger ist aber, daß diesr als erster Optimierungsprobleme für Funktionen *mehrerer Veränderlicher* betrachtete.

§3: Optimierung im Mehrdimensionalen

Aus heutiger Sicht mag es seltsam erscheinen, daß Optimierungsprobleme im unendlichdimensionalen Raum aller reeller Funktionen rund ein halbes Jahrhundert früher in Angriff genommen wurden als die sehr viel einfachere Frage nach beispielsweise den Maxima und Minima einer Funktion zweier Veränderlicher. Der Grund liegt einfach darin, daß der Begriff der Funktion damals noch kaum entwickelt war; einen Eindruck von den Schwierigkeiten gibt die Definition in LAGRANGEs Buch *Theéorie des fonctions analytiques:*

> Wir definieren als Funktion einer oder mehrerer Größen einen beliebigen mathematischen Ausdruck, in dem diese Größen in irgendeiner Weise vorkommen, eventuell zusammen mit anderen Größen, die als konstant oder von einem gegebenen Wert betrachtet werden; im Gegensatz zu den Größen der Funktion, die alle möglichen Werte annehmen können. In einer Funktion betrachten wir also

nur die Größen, die als variabel angenommen werden und nicht die Konstanten, die darin vorkommen können.

Der Begriff *Funktion* wurde von den ersten Analytikern benutzt, um die Potenzen einer gegebenen Größe zu bezeichnen. Seither wurde die Bedeutung dieses Begriffs erweitert zu einer beliebigen Größe, die in irgendeiner Weise aus irgendeiner anderen Größe gebildet wird. LEIBNIZ und die BERNOULLIS waren die ersten, die ihn in diesem allgemeinen Sinn gebrauchten, der heute allgemein akzeptiert ist.

Solange man derart mit dem *Inhalt* eines Begriffs zu kämpfen hat, ist es naturgemäß sehr schwer, damit zu arbeiten; trotzdem schaffte es LAGRANGE, die LEIBNIZsche notwendige Bedingung für die Existenz lokaler Extrema nicht nur für Funktionen auf der Ebene, dem Raum *usw.* zu verallgemeinern, sondern auch für Funktionen auf gekrümmten Kurven, Flächen und deren mehrdimensionalen Verallgemeinerungen; seine Methode wird im Vortrag über nichtlineare Optimierung behandelt werden.

JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736–1813) wurde als GIUSEPPE LODOVICO LAGRANGIA in Turin geboren und studierte dort zunächst Latein. Erst eine alte Arbeit von HALLEY über algebraische Methoden in der Optik weckte sein Interesse an der Mathematik, woraus ein ausgedehnter Briefwechsel mit EULER entstand. In einem Brief vom 12. August 1755 berichtete er diesem unter anderem über seine Methode zur Berechnung von Maxima und Minima; 1756 wurde er, auf EULERs Vorschlag, Mitglied der Berliner Akademie; zehn Jahre später zog er nach Berlin und wurde dort EULERs Nachfolger als mathematischer Direktor der Akademie. 1787 wechselte er an die Pariser Académie des Sciences, wo er bis zu seinem Tod blieb und unter anderem an der Einführung des metrischen Systems beteiligt war. Seine Arbeiten umspannen weite Teile der Analysis, Algebra und Geometrie.

Die nächsten fast zweihundert Jahre brachten kaum etwas neues in Bezug auf Optimierung: Der stürmische Aufschwung der Analysis im achtzehnten Jahrhundert war eng verbunden mit (und eine wesentliche Voraussetzung für) die „wissenschaftliche Revolution“, die vor allem unser physikalisches Weltbild grundlegend veränderte. Alle Methoden der Optimierung, die dabei eine Rolle spielen konnten, waren in der

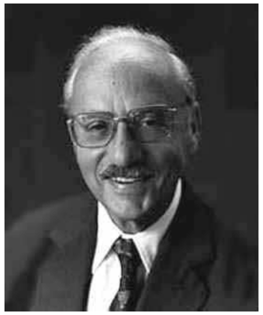
zweiten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts vorhanden, so daß es keinen Grund gab, das Gebiet weiterzuentwickeln.

Viel wichtiger war damals die Konsolidierung der vorhandenen Analysis, denn die Methoden, mit denen selbst die grundlegenden Rechenregeln der Infinitesimalrechnung begründet wurden, waren meist vom Ziel bestimmt und lieferten kein zuverlässiges Fundament. Einer der bedeutendsten Kritiker dieser Ansätze war der irische Philosoph, Theologe und streitbarer Autor auch von mathematischen, naturwissenschaftlichen und nationalökonomischen Schriften GEORGE BERKELEY (1685–1753). Nachdem er sich mit praktisch dem gesamten irischen Establishment verkracht hatte, wurde er 1734 Bischof von Cloyne, einer kleinen und weit von Dublin entfernten (protestantischen) Diezöse. Im gleichen Jahr erschien in London sein Buch *The analyst, or a discourse adressed to an infidel mathematician,* mit dem er nicht nur ungläubige Mathematiker bekehren wollte, sondern vor allem anhand zahlreicher Beispiele zeigte, daß Ansätze, die genauso plausibel erscheinen wie die von LEIBNIZ und NEWTON zu offensichtlich unsinnigen Ergebnissen führen können. Erst zu Beginn des neunzehnten Jahrhunderts gelang es AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789–1857), die Analysis auf die Theorie der algebraischen Ungleichungen zurückzuführen und damit auf ein allgemein anerkanntes Fundament zu stellen. Sein ε-δ-Kalkül ist, zur meist eher geringen Begeisterung von Schülern und Studenten, noch heute die gebräuchliche Methode zur Einführung analytischer Grundbegriffe, denn die einzige seither gefundene Alternative ist noch unanschaulicher.

Auf ein solides Fundament gestellt, entwickelte sich die Analysis im 19. und 20. Jahrhundert schnell weiter, allerdings hauptsächlich in Richtungen, die mit dem Thema dieses Seminars nur wenig zu tun haben. Erst nach dem zweiten Weltkrieg kamen Optimierungsprobleme auf, die neue mathematische Methoden erforderlich machten.

§4: Der Simplex-Algorithmus

Während des Krieges ging es darum, riesige Anzahlen von Soldaten von vielen verschiedenen Stützpunkten zu vielen verschiedenen Einsatzorten zu bringen; um die dafür notwendigen Pläne oder (in militärischer Sprechweise) Programme aufzustellen, gründete die US Luftwaffe 1943 eine eigene Planungsgruppe unter dem Harvard-Professor E.P. LEARNED. Nach Kriegsende, als finanzielle Gesichtspunkte wieder eine größere Rolle spielten, wurde daraus das Project SCOOP *(Scientific Computation of Optimum Programs),* das Materialeinsatz, Lagerhaltung *usw.* optimieren sollte. Dort arbeitete unter anderem auch GEORGE B. DANTZIG, der 1947 ein Verfahren entwickelte, mit dem sich lineare Funktionen unter durch lineare Ungleichungen gegebenen Nebenbedingungen optimieren lassen. Die Idee dieses *linearen Programmierens* (das damals noch mit Tischrechnern ausgeführt wurde) ist auf den ersten Blick sehr einfach – in der Tat so einfach, daß DANTZIG selbst sie zunächst für impraktikabel hielt. Ausgangspunkt ist die Beobachtung, daß lineare Funktionen keine *lokalen* Extrema haben; jedes Extremum muß daher auf dem Rand des Definitionsbereichs liegen, so daß man nur den Rand (und die Ränder seiner Bestandteile *usw.*) absuchen muß, um die Extrema zu finden. Leider gibt es schon bei relativ wenigen Variablen ziemlich viele Randkomponenten, und die Anzahl steigt exponentiell mit der Anzahl der Variablen; trotzdem stellte sich schnell heraus, daß DANTZIGs Verfahren, der *Simplex-Algorithmus,* schon mit den allerersten Computern problemlos für Probleme in Tausenden von Variablen eingesetzt werden konnte. Auch die Beschränkung auf lineare Funktionen und Nebenbedingungen erwies sich als deutlich weniger einschränkend, als es auf den ersten Blick erscheinen mag, denn viele Funktionen lassen sich zumindest stückweise recht gut durch lineare Funktionen approximieren.



GEORGE B. DANTZIG (*1914) arbeitete nach seinem Mathematikstudium im *U.S. Bureau of Labor Statistics.* Von 1941 bis 1946 leitete er den *Combat Analysis Branch* der Luftwaffe; dann promovierte er in Berkeley und wurde mathematischer Berater der Luftwaffe, für die er 1947 den Simplex-Algorithmus entwickelte. 1952 ging er zur RAND Corporation, 1960 wurde er Professor in Berkeley, wo er das *Operations Research Center* leitete. Seit 1966 ist Professor für Operations Research und Computer Science an der Stanford University. Er schrieb zahlreiche Arbeiten über Optimierung und Operations Research.

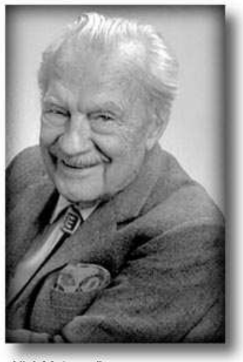
Inzwischen gibt es auch zwei Verfahren, die nicht das potentiell exponentielle Wachstum des Simplex-Algorithmus zeigen. Das erste dieser Verfahren, die sogenannte Ellipsoid-Methode, ist in allen realistischen Anwendungen deutlich schlechter als der Simplex-Algorithmus. Das zweite, der Algorithmus von KARMAKAR, geht – wie es auch DANTZIG ursprünglich vorhatte – durch das Innere des zulässigen Bereichs zum optimalen Randpunkt statt sich, wie der Simplex-Algorithmus, vollständig auf dem Rand zu bewegen; obwohl dieses Verfahren einer der ersten *patentierten* mathematischen Algorithmen war, ist es nur selten eine echte Konkurrenz zum Simplex-Algorithmus, der zu Beginn dieses Jahres von einer Kommission des American Institute of Physics (AIP) und des Institute of Electrical and Electronic Engineers (IEEE) als einer der Top Ten Algorithmen des zwanzigsten Jahrhunderts gewählt wurde. Er wird Gegenstand des morgigen Seminars sein.

§5: Nichtlineare Programmierung

Die Verallgemeinerung des Simplex-Verfahrens auf nichtlineare Funktionen ist *im Prinzip* einfach: Zwar gibt es nun auch lokale Extrema, aber wie man die findet, hat schließlich LAGRANGE schon fast 200 Jahre vor DANTZIG beschrieben. Es geht also im wesentlichen nur um die Kombination dieser beiden Ideen, und so ist es kein Wunder, daß schon 1951 H.W. KUHN und A.W. TUCKER die Bedingungen für die Berechnung der Extrema in diesem Fall aufstellten. Im Gegensatz zum linearen Fall ist hier allerdings die von DANTZIG befürchtete kombinatorische Explosion ein großes Problem, und effiziente Verfahren existieren bislang nur für Spezialfälle wie quadratische Funktionen unter quadratischen Nebenbedingungen und ähnliches. Die allgemeine Theorie von LAGRANGE und von KUHN-TUCKER wird Gegenstand der Freitagssitzung sein; für die Spezialfälle fehlt leider die Zeit.

Stattdessen soll wenigstens kurz ein alternatives Verfahren diskutiert werden, das wie der Simplex-Algorithmus als ein Top Ten Algorithmus des zwanzigsten Jahrhunderts gewählt wurde und auch wie dieser seine Wurzeln im zweiten Weltkrieg hat.

Ausgangspunkt war das Manhattan-Projekt, die Entwicklung der Atombombe in Los Alamos also. Da die Berechnung von deren Neutronenstrahlung mit Methoden der klassischen Mathematik zu komplex war, entwickelten JOHN VON NEUMANN und STANISLAS ULAM ein Verfahren, sie durch simulierte Zufallsexperimente zu bestimmen; zu Ehren eines Onkels von ULAM, der regelmäßig bei allen Verwandten Geld lieh, das er in Monte-Carlo verspielte, bezeichneten sie dieses Verfahren als *Monte-Carlo-Methode.* Darauf aufbauend entwickelte NICHOLAS METROPOLIS (1915–1999) ein Verfahren, das unter Verwendung von (Pseudo-)Zufallszahlen nach Optima sucht. Es ist auch für sehr komplizierte Funktionen in sehr vielen Veränderlichen anwendbar und liefert zwar kein garantiertes Ergebnis, ist aber bei sachgerechter Anwendung erfahrungsgemäß sehr erfolgreich.



Nick Metropolis

NICHOLAS METROPOLIS (1915–1999) wuchs auf in Chicago, wo er Physik studierte und 1941 promovierte. Seit 1943 arbeitete er, unterbrochen durch Professuren an der Universität Chicago von 1945–1948 und 1957–1965, in den Los Alamos Labaratories, die ihn im Nachruf als *giant of mathematics and one of the founders of the Information Age* bezeichneten. Sein Ruhm als Mathematiker beruht vor allem auf den von ihm entwickelten Anwendungen statistischer Verfahren auf eine Vielzahl von mathematischen Problemen; zum Pioneer des Informationszeitalter macht ihn u. a., daß er einer der ersten Anwender des ersten elektronischen Computers ENIAC war, dessen Nachfolger MANIAC baute und an der Universität Chicago das Institute for Computer Research gründete und bis 1965 leitete.

§6: Ganzzahlige Optimierung

Bei naturwissenschaftlichen und technischen Optimierungsproblemen wird fast nach immer *reellen* Lösungen gesucht; bei Anwendungen in der Wirtschaft sind aber häufig nur ganzzahlige Lösungen sinnvoll. Falls es um große ganze Zahlen geht, ist eine gerundete reelle Lösung oft ausreichend; geht es aber um viele Variablen mit kleinen Werten, ist das definitiv nicht mehr der Fall.

Die ganzzahlige oder kombinatorische Optimierung, um die es am letzten Tag des Seminars gehen wird, hat daher ihre eigenen Gesetze und

Verfahren. Einige davon beruhen auf dem Simplex-Verfahren, und auch der METROPOLIS-Algorithmus wird oft mit Erfolg eingesetzt; daneben spielen graphentheoretische Algorithmen eine Rolle.

Ein typisches Problem der kombinatorischen Optimierung ist einigen Anwesenden wohl heute bereits begegnet: Wie kommt man am einfachsten von der Wohnung zu diesem Seminar? Für die Anreise mit öffentlichen Verkehrsmittel liefern die elektronische Fahrplanauskunft der Bahn oder auch des Verkehrsverbunds Rhein-Neckar optimale Verbindungen (wobei das Wort „optimal“ innerhalb gewisser Grenzen selbst definiert werden kann) nach einem Algorithmus von EDSGAR DIJKSTRA, der sogenannten *dynamischen Programmierung.* (Auch hier, wie bei der linearen und nichtlinearen Programmierung, hat das Wort *Programmierung* nichts mit Computerprogrammen zu tun, auch wenn das Verfahren heute praktisch immer per Computer durchgeführt wird.)

§7: Ausblick

Probleme der kombinatorischen Optimierung lassen sich nur selten in befriedigender Weise in ein Programm für einen klassischen Computer übersetzen; viele Probleme sind so, daß es für sie kein effizientes Programm geben *kann* – es sei denn, unsere derzeitigen (zugegebenermaßen noch sehr unbefriedigenden und spekulativen) Theorien über die Fähigkeiten klassischer Computer wären radikal falsch.

Dies legt die Frage nahe, ob nicht vielleicht anders konstruierte Computer hier besser geeignet sein könnten.

Eine bereits weithin eingesetzte Art nichtklassischer Computer sind neuronale Netze; eine Variante davon, die sogenannten BOLTZMANN-Maschinen, implementieren direkt Varianten des METROPOLIS-Algorithmus und sind daher sehr effizient für Probleme, die sich darauf zurückführen lassen.

Sehr viel neuer und nur an einem einzigen sehr einfachen Beispiel erprobt sind DNS-Computer, die mit Molekülketten rechnen, wie sie in unserer Erbsubstanz vorkommen. Durch Zusatz geeigneter Enzyme können diese dazu gebracht werden, sich nach vorgegebenen Regeln zusammenzufügen; durch chromatographische Verfahren können Ketten mit erwünschten Eigenschaften ausgesondert werden, und durch die in der Gentechnik fundamentale Polymerasekettenreaktion können sie vervielfältigt werden.

ADLEMAN löste damit (in vierzehn Tagen Laborarbeit) einen einfachen Fall des sogenannten *Travelling Salesman Problems,* bei dem es darum geht, für eine vorgegebene Menge von Städten einen Weg zu finden, der genau einmal durch jede dieser Städte geht.

LEONARD M. ADLEMAN ist vor allem durch das gemeinsam mit RONALD RIVEST und ADI SHAMIR am MIT entwickelte RSA-Verfahren der Kryptographie mit öffentlichen Schlüsseln bekannt, das auf der Schwierigkeit der Primfaktorzerlegung großer Zahlen beruht. ADLEMAN steuerte den zahlentheoretischen Sachverstand zu dieser Zusammenarbeit bei und wurde erster Präsident der gemeinsam gegründeten Firma *RSA Computer Security Inc.,* die dieses System patentierte und vermarktete. In dieser Funktion war er nicht sehr erfolgreich, so daß bald ein hauptamtlicher Geschäftsführer eingestellt wurde und ADLEMAN sich wieder voll der Forschung widmen konnte. Unter anderem bewies er 1992 gemeinsam mit MING-DEH A. HUANG, daß man eine Zahl in polynomialer Zeit als Primzahl erkennen kann, ein Resultat, das zwar praktisch nicht sehr relevant ist, das aber Theoretiker lange Zeit beschäftigt hatte.

Später wechselte ADLEMAN für einige Zeit in die Molekularbiologie, wo er sich vor allem mit der Erforschung des AIDS-Virus beschäftigte. Die Ergebnisse der Gentechnik brachten ihn auf die Idee, DNS-Sequencen zum Rechnen zu benutzen; 1994 demonstrierte er anhand eines einfachen *travelling salesman* Problems, daß dies möglich ist. Derzeit arbeitet er als Professor für Computer Science an der University of Southern California in Los Angelos.

Inzwischen wurden zahlreiche weitere Anwendungen von DNS-Computern vorgeschlagen, und natürlich wird langfristig die Laborarbeit durch die in der chemischen Verfahrenstechnik üblichen Reaktoren und Roboter ersetzt werden, was zu einer deutlichen Geschwindigkeitsstei-

gerung führen wird.

Haupthindernis für eine schnelle Weiterentwicklung der Theorie ist der Mangel an Wissenschaftlern, die einerseits eine fundierte Ausbildung in biochemischen Labortechniken haben, andererseits aber auch soviel von Algorithmen verstehen, daß sie welche entwerfen können, die an die Möglichkeiten eines Chemielabors angepaßt sind. Fast alles, was derzeit veröffentlich wird, sind Arbeiten theoretischer Informatiker, die die etwas betagte Theorie formaler Sprachen ohne Rücksicht auf chemische Realitäten über einem Alphabet aus den vier DNS-Basen neu aufwärmen; echter Forschritt wird wohl erst möglich sein, wenn die ersten Universitäten eine neue Studentengeneration von Molekularbiologen mit Kenntnissen der Informationstechnik in die Labors schicken. Dann aber könnte es gut sein, daß ein Seminar über Optimierung in zwanzig Jahren zumindest im Vortrag über kombinatorische Optimierung nichts mehr mit dem zu tun haben wird, was Sie am Samstag lernen werden – auch wenn der Samstagsstoff wahrscheinlich zumindest *eine* wesentliche Zutat auch der neuen Verfahren sein wird.