WOLFGANG K. SEILER A5, C201
Tel. 2515

21. August 2008

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Finden Sie eine komplexe Zahl z mit $z^2 = -8I$!

Lösung: $-8i = -8e^{\pi i/2} = 8e^{-\pi i/2}$; somit ist $z = \sqrt{8} \cdot e^{-\pi i/4} = \sqrt{8} \cdot (\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{8}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 - 2i$ eine Lösung. (Die andere ist natürlich $-z$.)
Alternativ: Schreibe $z = x + iy$. Dann ist $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -8i$ genau dann, wenn $x = \pm y$ und $2xy = -8$ ist. Also muß $x = -y = \pm 2$ sein.

2) Bestimmen Sie die reelle FOURIER-Reihe von $f(t) = 8\cos^4 t - 4\cos^2 t$!

Lösung: $8\cos^2 t - 2\cos^2 t = 8\left(\dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^4 - 4\left(\dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^2$
$= \dfrac{e^{4it} + 4e^{2it} + 6 + 4e^{-2it} + e^{-4it}}{2} - (e^{2it} + 2 + e^{-2it}) = 1 + 2\cos 2t + \cos 4t$.

3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

Lösung: *Richtig,* denn A ist eine symmetrische reelle Matrix.

4) *Richtig oder falsch:* Für jede reelle $n \times n$-Matrix A ist $e^{A+A^2} = e^A \cdot e^{A^2}$.

Lösung: *Richtig,* denn A und A^2 kommutieren: $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = A^3$.

5) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 6\sqrt[3]{y(t)}$ mit $y(0) = 0$ ist eindeutig lösbar.

Lösung: *Falsch:* Sowohl $y(t) \equiv 0$ als auch $y(t) = \pm 8t^{3/2}$ sind Lösungen.

6) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte des Systems

$$\dot{x}(t) = x(t) - y(t)^2 \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = x(t)^2 - y(t)^2 \,!$$

Lösung: (x, y) ist genau dann ein Gleichgewichtspunkt, wenn $x - y^2 = 0$ und $x^2 - y^2 = 0$ ist. Also ist $x = y^2$, und damit wird die zweite Gleichung zu $y^4 - y^2 = y^2(y^2 - 1) = 0$. Letztere Gleichung hat die Lösungen $y = 0$ und $y = \pm 1$; die drei Fixpunkte sind somit $(0, 0)$, $(1, 1)$ und $(1, -1)$.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ kann $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ax+b}{x^2+b}\,dx$ mit Hilfe des Residuensatzes berechnet werden?

Lösung: Der Nenner ist ein quadratisches Polynom in x; das Integral kann nur dann über den Residuensatz berechnet werden, wenn der Grad des Zählers mindestens um zwei kleiner ist. Somit muß a verschwinden. Außerdem darf der Nenner keine reelle Nullstelle haben; also muß auch $b > 0$ sein.

b) Berechen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{12}{x^2+9}\,dx$!

Lösung: Der Nenner des Integranden verschwindet bei $\pm 3i$; da für die Berechnung des Integrals nur die Residuen der Nullstellen mit positivem Imaginärteil relevant sind, interessiert und nur die Nullstelle $z_0 = 3i$. Sie ist einfach, so daß wir das Residuum nach der Limesformel berechnen können:

$$\operatorname{Res}_{x=3i} \frac{12}{x^2+9} = \lim_{x\to 3i} \frac{12(x-3i)}{(x+3i)(x-3i)} = \lim_{x\to 3i} \frac{12}{(x+3i)} = \frac{12}{6i} = -2i\,.$$

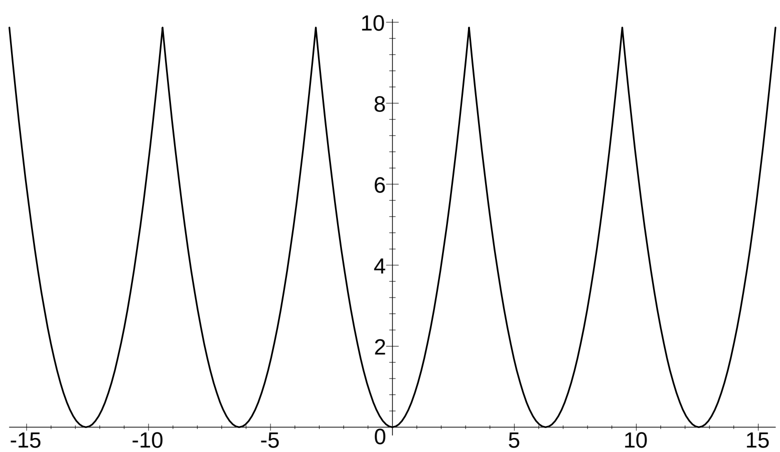
Somit ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{12}{x^2+9}\,dx = 2\pi i \cdot (-2i) = 4\pi\,.$

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode 2π und für $-\pi \le t \le \pi$ sei $f(t) = t^2$.

a) Skizzieren Sie die Funktion f über dem Intervall $[-5\pi, 5\pi]$!

Lösung:



b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

Lösung: f ist eine gerade Funktion

c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f !

Lösung: f ist periodisch mit Periode 2π; die Kreisfrequenz ist also $\omega = 1$. Da f eine gerade Funktion ist, gibt es keine Sinusterme.

Der konstante Term ist der Mittelwert über eine Periode, also ist

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{t^3}{6\pi}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}\,.$$

Die Koeffizienten der Kosinusterme sind nach der Formel am Ende der Klausur

$$a_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos kt\,dt = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{t^2}{k}-\frac{2}{k^3}\right)\sin kt + \frac{2t}{\pi\cdot k^2}\cos kt\bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{k^2}\left(-(-1)^k-(-1)^k\right) = \frac{(-1)^k\cdot 4}{k^2}\,,$$

denn $\sin k\pi = 0$ und $\cos k\pi = (-1)^k$. Die FOURIER-Reihe von f ist somit

$$S_f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 4\cos kt}{k^2}\,.$$

d) Wo tritt bei der Konvergenz dieser FOURIER-Reihe das GIBBS-Phänomen auf, und wohin konvergiert die Reihe an diesen Punkten?

Lösung: Da die Funktion stetig ist, tritt es nirgends auf; die Reihe konvergiert daher überall gegen den Funktionswert.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Funktion $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{für } 0 \le |t| \le 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$!

Lösung: $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-2}^{2} t^2\,e^{-i\omega t}\,dt$ .Nach den Hinweisen im Anhang der Klausur ist die Stammfunktion des Integranden

$$\left(\frac{t^2}{-i\omega} - \frac{2t}{-\omega^2} + \frac{2}{i\omega^3}\right)e^{-i\omega t}\,.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \frac{4i}{\omega}(e^{-2i\omega}-e^{2i\omega}) + \frac{4}{\omega^2}(e^{-2i\omega}+e^{2i\omega}) - \frac{2i}{\omega^3}(e^{-2i\omega}-e^{2i\omega}) \\
&= \left(\frac{4i}{\omega}-\frac{2i}{\omega^3}\right)(e^{-2i\omega}-e^{2i\omega}) + \frac{4}{\omega^2}(e^{-2i\omega}+e^{2i\omega}) \\
&= \left(\frac{8}{\omega}-\frac{4}{\omega^3}\right)\sin 2\omega + \frac{8}{\omega^2}\cos 2\omega\,.
\end{aligned}$$

b) Was ist die LAPLACE-Transformierte von f?

Lösung: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^2 t^2 e^{-st}\,dt$ läßt sich ebenfalls mit der Formel aus dem Anhang berechnen zu $\left(-\frac{t^2}{s}-\frac{2t}{s^2}-\frac{2}{s^3}\right)e^{-st}\bigg|_0^2 = \frac{2}{s^3} - \left(\frac{4}{s}+\frac{4}{s^2}+\frac{2}{s^3}\right)e^{-2s}$.

c) Wo verschwindet die Faltung $f * f$?

Lösung: $f * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)f(s)\,ds$ verschwindet für $|t| \ge 4$, da dann der Integrand für jedes s verschwindet. Für $|t| < 4$ gibt es stets zumindest ein Teilintervall, in dem der Integrand positiv ist; da er nirgends negativ wird, ist dort daher $f * f(t) \ne 0$.

d) Was ist die FOURIER-Transformierte von $f * f$?

Lösung: Das Quadrat von $\widehat{f}(\omega)$.

Aufgabe 4: *(12 Punkte)*

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Wir berechnen das charakteristische Polynom von A durch Entwicklung nach der zweiten Zeile:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(2+\lambda)\big((\lambda+1)(\lambda+5)+4\big) = -(2+\lambda)(\lambda^2+6\lambda+9) = -(2+\lambda)(\lambda+3)^2 .$$

Es gibt also die Eigenwerte $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -3$.

$\lambda_1 = -2$ hat die algebraische und damit auch geometrische Vielfachheit eins; $\lambda_2 = -3$ hat algebraische Vielfachheit zwei. Der Eigenraum zu $\lambda_1 = -2$ wird offensichtlich aufgespannt vom zweiten Basisvektor, denn A mal der zweite Basisvektor ist die zweite Spalte der Matrix, und die ist gerade das (-2)-fache dieses Vektors. Also haben wir den Eigenvektor $\vec{v}_1 = \vec{b}_2$.

Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = -3$ werden von der Matrix

$$A + 3E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

annulliert. Wie uns deren zweite Zeile zeigt, muß die zweite Komponente eines jeden Eigenvektors verschwinden, und nach den beiden anderen Zeilen muß die erste Komponente das Doppelte der dritten sein. Der Eigenraum ist daher nur eindimensional und wird aufgespannt vom Vektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die geometrische Vielfachheit von λ_2 ist daher nur gleich eins.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Lösung: *Nein,* denn die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts -3 ist kleiner als die algebraische.

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt?

Lösung: Wir haben bereits zwei Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$; da λ_2 geometrische Vielfachheit eins aber algebraische Vielfachheit zwei hat, brauchen wir noch einen Hauptvektor zweiter Stufe für λ_2. Da

$$(A + 3E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist, besteht der Hauptraum aus allen Vektoren mit zweiter Komponente null; ein solcher Vektor, der nicht im Eigenraum liegt, ist beispielsweise der dritte Basisvektor $\vec{v}_3 = \vec{b}_3$. $A\vec{b}_3$ ist gleich der dritten Spalte von A, und diese ist gleich $-3\vec{b}_3 - 2\vec{v}_2$. Bezüglich der Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ hat A somit die Dreiecksgestalt

$$\Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} .$$

d) Was ist e^{At} für $t \in \mathbb{R}$?

Lösung: Wir schreiben $\Delta = D + N$ mit

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Da N den dritten Basisvektor auf ein Vielfaches des zweiten abbildet und diesen wiederum auf den Nullvektor, ist N^2 die Nullmatrix. Außerdem kommutieren N und D, also ist

$$\begin{aligned} e^{\Delta t} &= e^{Dt+Nt} = e^{Dt}e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} (E + Nt) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & -2te^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Um zu sehen, wie diese Matrix bezüglich der Standardbasis $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ aussieht, brauchen wir die Inverse zur Matrix B des Basiswechsels; letztere hat die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ als Spalten, d.h.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

wie man entweder sofort sieht oder nach einer Zeilenvertauschung und einer Zeilenoperation mit dem GAUSS-Algorithmus. Damit ist

$$e^{At} = Be^{\Delta t}B^{-1} = \begin{pmatrix} (1+2t)e^{-3t} & 0 & -4te^{-3t} \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ te^{-3t} & 0 & (1-2t)e^{-3t} \end{pmatrix} .$$

e) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = -x(t) - 4z(t), \quad \dot{y}(t) = -2y(t), \quad \dot{z}(t) = -x(t) - 5z(t)$$

mit $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ und $z(0) = 2$! *Falls Sie Teil d) nicht gelöst haben, können Sie hier mit der (falschen) „Ersatzmatrix“* $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3te^{-2t} & 2 & -2te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 3te^{-2t} & 3 & e^{-2t} + 3te^{-2t} \end{pmatrix}$ *arbeiten.*

Lösung: Dies ist ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, und seine Koeffizientenmatrix ist die gerade betrachtete Matrix A. Die einzige Lösung ist daher

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-6t)e^{-3t} \\ 0 \\ (2-3t)e^{-3t} \end{pmatrix} .$$

d.h. $x(t) = (1-6t)e^{-3t}$, $\quad y(t) = 0 \quad$ und $\quad z(t) = (2-3t)e^{-3t}$.

f) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

Lösung: Da e^{-3t} schneller gegen null geht als eine lineare Funktion gegen $\pm\infty$, gehen die x- und z-Komponente gegen null. Die y-Komponente bleibt konstant null.

g) Wie ändert sich das Langzeitverhalten von $x(t), y(t)$ und $z(t)$ bei einer leichten Veränderung der Anfangsbedingungen?

Lösung: Sobald der Anfangswert für $y(t)$ nicht mehr verschwindet, wird $y(t)$ zu einem Vielfachen von e^{-2t}, das für $t \to \infty$ gegen null geht; bei $x(t)$ und $y(t)$ ändert sich nur der Vorfaktor. Somit werden die Störungen allesamt weggedämpft. Am qualitativen Verhalten ändert sich nichts.

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 29y(t) = 25\cos 2t - 8\sin 2t\,!$$

Lösung: Die homogene Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 29y(t) = 0$ hat die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 4\lambda + 29 = 0$. Quadratische Ergänzung macht daraus

$$\lambda^2 + 4\lambda + 29 = (\lambda + 2)^2 + 25 = 0\,,$$

die Nullstellen sind also $\lambda_{1/2} = -2 \pm 5i$ und die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist $y(t) = e^{-2t}(a\cos 5t + b\sin 5t)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, reicht es, eine einzige Lösung zu finden, denn die Differenz zweier Lösungen erfüllt die homogene Gleichung.

Erfahrungsgemäß findet man bei Gleichungen dieser Bauart oft eine spezielle Lösung, die von ähnlicher Bauart ist wie die rechte Seite der Gleichung; wir können als unser Glück versuchen mit einem Ansatz der Form $x(t) = c\cos 2t + d\sin 2t$. Dann ist $\dot{x}(t) = 2d\cos 2t - 2c\sin 2t$ und $\ddot{x}(t) = -4c\cos 2t - 4d\sin 2t$, also

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 29x(t) &= (-4c + 8d + 29c)\cos 2t + (-4d - 8c + 29d)\sin 2t \\ &= (25c + 8d)\cos 2t + (-8c + 25d)\sin 2t\,.\end{aligned}$$

Dies muß gleich der rechten Seite $90\cos 6t$ sein, c und d sind somit Lösungen des linearen Gleichungssystems $25c + 8d = 25$ und $-8c + 25d = -8$. Auch ohne Rechnung sieht man, daß dann $c = 1$ und $d = 0$ sein muß. Die gesuchte allgemeine Lösung ist daher

$$y(t) = \cos 2t e^{-2t}(a\cos 5t + b\sin 5t) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

Lösung: Da e^{-2t} gegen Null geht, konvergieren alle Lösungen gegen die spezielle Lösung $x(t) = \cos 2t$, also gegen eine reine Schwingung.

Aufgabe 6: *(3 Punkte)*

Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = -ty(t)^3$ mit $y(0) = 1$!

Lösung: Das ist offensichtlich eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen: Wann immer $y(t) \neq 0$ ist, ist sie äquivalent zu $\dfrac{\dot{y}(t)}{y(t)^3} = -t$.

Für die Lösung des Anfangswertproblems gilt daher

$$\int_1^{y(t)} \frac{d\eta}{\eta^2} = -\int_0^t \tau\, d\tau\,, \ \text{d.h.} \quad -\frac{1}{2y(t)^2} + \frac{1}{2} = -\frac{t^2}{2}\,.$$

Damit ist $y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$.