Nichtlineare Differentialgleichungen können nur selten explizit in geschlossener Form gelöst werden. Trotzdem lohnt sich die Suche nach einer Lösungsformel, denn eine solche Formel gestattet erstens bessere theoretische Aussagen über das Verhalten der Lösungen und zweitens kann eine einmal gefundene Lösungsformel immer wieder auf Systeme mit anderen Anfangswerten und/oder Parametern angewandt werden, wohingegen eine numerische Lösung für jede Konstellation von Anfangswerten neu berechnet werden muß. Auch ist die Auswertung einer expliziten Lösungsformel zwar keinesfalls *immer* einfacher (oder numerisch stabiler) als eine direkte numerische Lösung, aber doch meistens.

Dieser Paragraph soll anhand einiger einfacher Beispiele und Sätze einen ersten Überblick über das sehr weite Gebiet der nichtlinearen Differentialgleichungen geben.

a) Eindeutigkeitsfragen

Wir hatten Differentialgleichungen eingeführt, um aus dem gegenwärtigen Zustand eines Systems Folgerungen über die künftige Entwicklung zu ziehen. Dies ist natürlich nur dann möglich, wenn das zugehörige Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist. Bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist das, wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, immer der Fall; in diesem Abschnitt wollen wir uns überlegen, welche Probleme im nichtlinearen Fall auftreten können.

Betrachten wir als erstes die Differentialgleichung

$$\dot y(t) = \frac{1}{2y(t)}\,,$$

wobei wir uns hier wie bei allen Beispielen in diesem Abschnitt der Einfachheit halber auf *reelle* Lösungsfunktionen beschränken wollen.

Multiplikation beider Seiten mit $2y(t)$ führt auf

$$2\dot y(t)y(t) = 1\,,$$

die Ableitung von $y(t)^2$ ist also gleich 1. Damit ist

$$y(t)^2 = t + C \quad \text{oder} \quad y(t) = \pm\sqrt{t+C}$$

mit einer beliebigen Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Fordern wir noch, daß $y(0) = 0$ sein soll, so hat das entsprechende Anfangswertproblem die beiden Lösungen

$$y(t) = \sqrt{t} \quad \text{und} \quad y(t) = -\sqrt{t}\,,$$

von denen die eine für $t \to \infty$ gegen $+\infty$ geht, die andere gegen $-\infty$.

Als zweites Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot y(t) = 2\sqrt{|y(t)|} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0\,.$$

Es hat natürlich die Nullfunktion als Lösung, aber auch die stetig differenzierbare Funktion

$$y(t) = \begin{cases} t^2 & \text{für } t \ge 0 \\ -t^2 & \text{für } t \le 0 \end{cases}\,.$$

($y(t) = t^2$ ist für $t < 0$ *keine* Lösung.) Da die Ableitung von $\pm t^2$ für $t = 0$ verschwindet, sind aber auch die beiden zusammengesetzten Funktionen

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \ge 0 \\ -t^2 & \text{für } t \le 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad y(t) = \begin{cases} t^2 & \text{für } t \ge 0 \\ 0 & \text{für } t \le 0 \end{cases}$$

stetig differenzierbar und Lösungen.

Es kommt noch schlimmer: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ löst

$$y(t) = (t-a)^2$$

für $t \ge a$ (und nur dort) die Differentialgleichung, wenn auch nicht das Anfangswertproblem. Für $a \ge 0$ können wir dazu die zusammengesetzte Funktion

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le a \\ (t-a)^2 & \text{für } t \ge a \end{cases}$$

betrachten; diese ist in jedem Punkt t stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung samt Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

Auf Grund der Differentialgleichung und der Anfangsbedingung wissen wir also nur, daß die Funktion entweder konstant gleich null ist oder aber

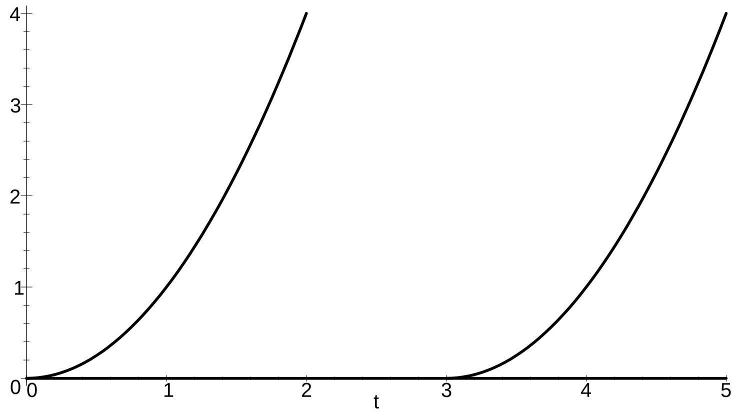

Abb. 34: Drei Lösungen von $\dot y(t) = \sqrt{|y(t)|}$ mit $y(0) = 0$

nach einem Zeitraum $a \geq 0$ damit beginnt, quadratisch gegen unendlich zu gehen – nicht gerade viel Information.

Bei der Differentialgleichung

$$\dot y(t) + \frac{y(t)}{2t^3} = 0$$

schließlich überzeugt man sich leicht, daß für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion $y(t) = \lambda e^{-1/t^2}$ eine Lösung ist. Diese Funktion ist zwar *a priori* für $t = 0$ nicht definiert, sie kann aber stetig ergänzt werden durch die Vorschrift, daß ihr Wert dort gleich null sein soll. Genauso verhält es sich mit ihrer Ableitung

$$\dot y(t) = -\frac{y(t)}{2t^3} = -\frac{\lambda}{2t^3} \cdot e^{-1/t^2} ,$$

denn e^{-1/t^2} geht schneller gegen null als $\frac{\lambda}{2t^3}$ gegen unendlich. Also ist die Funktion stetig differenzierbar (sogar beliebig oft, wie man sich ohne große Schwierigkeiten überlegen kann). Ihr Wert an der Stelle $t = 0$ ist unabhängig von λ immer gleich null, d.h. das Anfangswertproblem

$$\dot y(t) + \frac{y(t)}{2t^3} = 0 \quad \text{und} \quad y(0) = 0$$

hat *jede* der Funktionen $y(t) = \lambda e^{-1/t^2}$ als Lösung, egal welchen Wert $\lambda \in \mathbb{R}$ man auch wählt. Über die Entwicklung eines Systems, das durch

diese Gleichung beschrieben wird, läßt sich also *nichts* aussagen. Erst wenn $x(t_0)$ für einen Wert $t_0 \neq 0$ bekannt ist, lassen sich die Lösungen mit den verschiedenen Parameterwerten λ voneinander unterscheiden. Für $t \to \infty$ konvergiert die Lösungsfunktion gegen den Wert λ, der somit die entscheidende Größe für die Beschreibung des Langzeitverhaltens ist und trotzdem durch das Anfangswertproblem völlig unbestimmt gelassen wird.

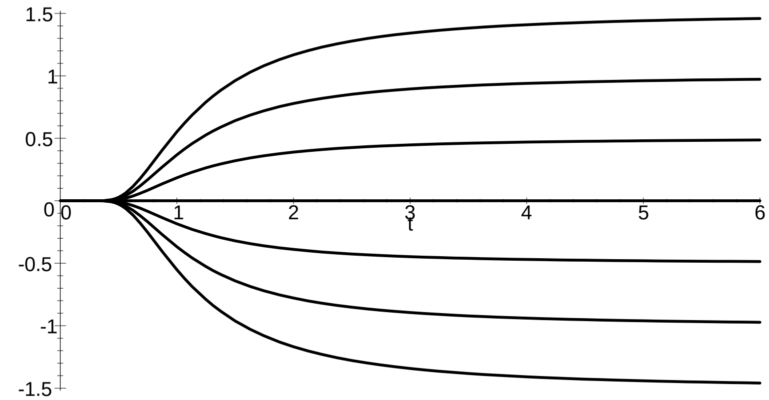

Abb. 35: Sieben Lösungen von $\dot y(t) + \frac{y(t)}{2t^3} = 0$ mit $y(0) = 0$

Falls man Differentialgleichungen zur Beschreibung und vor allem zur Vorhersage realer Phänomene einsetzt, ist es also definitiv kein überflüssiger Luxus, wenn man sich zunächst darum kümmert, ob die Differentialgleichung zusammen mit ihrer Anfangsbedingung überhaupt eine eindeutig bestimmte Lösungsfunktion festlegt. Ohne diese Vorüberlegung ist jede Lösungsfunktion wertlos.

b) Der Satz von Picard und Lindelöf

Wir betrachten in diesem Abschnitt das eindimensionale Anfangswertproblem

$$\dot y(t) = f\big(y(t), t\big) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = c_0 .$$

Dabei sei

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \times [t_0,\, t_1] \to \mathbb{R} \\ \qquad (y,t) \mapsto f(y,t) \end{cases}$$

eine stetige Funktion, d.h. für jeden Punkt (y,t) aus dem Definitionsbereich und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$\left| f\left(\widetilde{y},\widetilde{t}\right) - f(y,t)\right| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |\widetilde{y} - y| < \delta \text{ und } \left|\widetilde{t} - t\right| < \delta\,.$$

Indem wir beide Seiten der Differentialgleichung ab t_0 integrieren, erhalten wir unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(t_0) = c_0$ die neue Gleichung

$$y(t) = c_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(y(\tau),\tau\big)\, d\tau\,,$$

aus der durch Differenzieren sofort folgt, daß jede ihrer Lösungen das obige Anfangswertproblem löst.

Wir bezeichnen die Funktion auf der rechten Seite mit $T(y)$, d.h.

$$T(y)(t) \underset{\text{def}}{=} c_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(y(\tau),\tau\big)\, d\tau\,.$$

Dies definiert einen Operator, der jeder stetigen Funktion auf $[t_0,\, t_1]$ wieder eine solche Funktion zuordnet, und wir können nun kurz sagen, daß wir eine Funktion suchen, die der Gleichung $y = T(y)$ genügt, oder, anders ausgedrückt, einen Fix„punkt“ des Operators T.

Um einen solchen Fixpunkt zu erhalten ,starten wir mit einer beliebigen Funktion $y_0(t)$ auf dem Intervall $[t_0,\, t_1]$ und betrachten die Folge von Funktionen $y_n(t)$, die für $n \geq 1$ rekursiv durch $y_n = T(y_{n-1})$ definiert ist, d.h. $y_n = T^n(y_0)$. Falls diese Folge gegen eine Funktion y_∞ konvergiert, ist klar, daß diese Funktion Fixpunkt von T sein muß, denn natürlich ändert dann eine weitere Anwendung von T nichts mehr.

Als Beispiel betrachten wir das (wohlbekannte) Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = y(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1\,.$$

Hier ist

$$T(y)(t) = 1 + \int_0^t y(\tau)\, d\tau\,;$$

falls wir also von der konstanten Funktion $y_0(t) = 1$ ausgehen, ist

$$y_1(t) = 1 + \int_0^t d\tau = 1 + t\,,$$

$$y_2(t) = 1 + \int_0^t (1+\tau)\, d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2}\,,$$

$$y_3(t) = 1 + \int_0^t \left(1 + \tau + \frac{\tau^2}{2}\right) d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\,,$$

und so weiter. Ab hier wird man erraten, daß die Funktionen $y_n(t)$ gerade die TAYLOR-Polynome n-ten Grades der Exponentialfunktion sind, was sich dann leicht durch vollständige Induktion beweisen läßt. Somit ist

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = e^t\,,$$

wie auch nicht anders zu erwarten war.

In diesem Beispiel geht also alles gut; in anderen Fällen kann es, wie die Beispiele aus dem vorigen Abschnitt zeigten, Probleme geben. Um zu positiven Ergebnisse zu kommen, wollen wir mehr von f verlangen als die bloße Stetigkeit und uns auch auf ein abgeschlossenes Intervall $[t_0,\, t_1]$ beschränken statt t auf der gesamten reellen Achse variieren zu lassen. Eine mögliche Verschärfung der Stetigkeitsforderung ist die

Lipschitz-Bedingung: Es gibt eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, die sogenannt genannt LIPSCHITZ-Konstante, so daß für alle $t \in [t_0,\, t_1]$ und alle $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|f(y_2,t) - f(y_1,t)| \leq L\,|y_2 - y_1|\,.$$

RUDOLF OTTO SIGISMUND LIPSCHITZ (1832–1903) wurde in Königsberg geboren und starb in Bonn. Am besten bekannt ist er durch die gerade definierte LIPSCHITZ-Bedingung für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen. Sein Hauptarbeitsgebiet waren die Differentialgleichungen der mathematischen Physik, jedoch beschäftigte er sich auch mit anderen Hilfsmitteln der mathematischen Physik wie etwa Matrizengruppen. Seine Arbeiten über dynamische Systeme haben wichtige Anwendungen in der Himmelsmechanik.

Die LIPSCHITZ-Bedingung muß glücklicherweise in vielen Fällen nicht explizit durch Abschätzungen nachgeprüft werden, denn es gilt

Lemma: Falls die partielle Ableitung von f nach y existiert und betragsmäßig beschränkt ist durch eine Konstante L, genügt f einer LIPSCHITZ-Bedingung mit L als LIPSCHITZ-Konstante.

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es für jedes feste t (das wir bezüglich der partiellen Ableitung wie eine Konstante betrachten können) und für je zwei Werte $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ einen Punkt $z \in [y_1, y_2]$ mit der Eigenschaft, daß

$$\frac{f(y_2,t)-f(y_1,t)}{y_2-y_1} = \frac{\partial f}{\partial y}(z,t)$$

ist. Also ist

$$|f(y_2,t)-f(y_1,t)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(z,t)\right| |y_2-y_1| ,$$

und da der Betrag der partiellen Ableitung überall höchstens L ist, erfüllt f eine LIPSCHITZ-Bedingung mit Konstante L. ■

Wir betrachten nun wieder den oben eingeführten Operator T, von dem uns im Augenblick nur interessieren soll, daß er stetige Funktionen auf dem Intervall $[t_0, t_1]$ in ebensolche Funktionen überführt. Wir suchen eine Funktion $y(t)$ mit $T(y) = y$, die wir wie oben als Limes einer Funktionenfolge konstruieren wollen.

Um von einem solchen Limes reden zu können, brauchen wir zunächst eine Norm; wir verwenden dazu die *Supremumsnorm*, die für auf $[t_0, t_1]$ stetige Funktionen h durch

$$\|h\| \underset{\text{def}}{=} \sup_{\tau\in[t_0,\,t_1]} |h(\tau)|$$

definiert ist. Da eine stetige Funktion in einem abgeschlossenen Intervall ihr Maximum annimmt, existiert dieses Supremum und ist sogar ein Funktionswert von h.

Über dem Intervall $[0, 10]$ beispielsweise ist $\|\sin\| = \|\cos\| = 1$, und für die Funktion $g(t) = t^2$ ist $\|g\| = 10^2 = 100$.

Unser wichtigstes Hilfsmittel zur Untersuchung, wann eine Grenzfunktion existiert, ist der BANACHsche Fixpunktsatz, der in diesem Semester in der Numerik allgemein formuliert und bewiesen wird. Um keine neuen Begriffe einführen zu müssen, begnüge ich mich hier mit dem für unsere Zwecke notwendigen Spezialfall; der Beweis vereinfacht sich dadurch zwar nicht, aber die Formulierung des Satzes wird leichter verständlich.

Banachscher Fixpunktsatz: Für einen Operator T, der stetige Funktionen auf $[t_0, t_1]$ auf ebensolche Funktionen abbildet, gebe es eine Konstante $K < 1$ derart, daß für alle auf $[t_0, t_1]$ stetigen Funktionen $w(t), z(t)$ gilt

$$\|T(z) - T(w)\| \le K\,\|z - w\| .$$

Dann gibt es genau eine stetige Funktion $y\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $T(y) = y$.

Beweis: Zunächst ist klar, daß es *höchstens* eine solche Funktion gibt, denn sind $y(t)$ und $z(t)$ zwei Lösungen, so ist

$$\|z - y\| = \|T(z) - T(y)\| \le K\,\|z - y\| ,$$

was für $K < 1$ nur dann möglich ist, wenn $\|z - y\|$ verschwindet, wenn also überall $y(t) = z(t)$ ist.

Zum Nachweis der Existenz starten wir mit irgendeiner stetigen Funktion $y_0(t)$ und iterieren sie mit T, d.h. für $n > 0$ sei $y_n = T(y_{n-1})$.

Wir überlegen uns zunächst, daß für jedes feste $\tau \in [t_0,\, t_1]$ die Folge der reellen Zahlen $y_n(\tau)$ konvergiert. Nach dem CAUCHYschen Konvergenzkriterium müssen wir dazu zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$|y_m(\tau) - y_n(\tau)| \le \varepsilon \quad \text{falls} \quad m > n > N$$

ist. Da wir mit der Supremumsnorm arbeiten, ist

$$|y_m(\tau) - y_n(\tau)| \le \|y_m - y_n\| \ ,$$

und nach Voraussetzung ist für jedes $r \in \mathbb{N}$

$$\|y_{r+2} - y_{r+1}\| \le K\, \|y_{r+1} - y_r\| \ .$$

Induktiv folgt daraus, daß

$$\|y_{r+1} - y_r\| \le K^r\, \|y_1 - y_0\|$$

ist und damit nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
\|y_m - y_n\| &\le \left\|y_m - y_{m-1}\right\| + \cdots + \|y_{n+1} - y_n\| \\
&\le K^m\, \|y_1 - y_0\| + \cdots + K^n\, \|y_1 - y_0\| \\
&= (K^m + \cdots + K^n)\ \|y_1 - y_0\| \\
&= K^n(1 + K + \cdots + K^{m-n})\, \|y_1 - y_0\| \\
&\le K^n \left(\sum_{i=0}^{\infty} K^i\right) \|y_1 - y_0\| = \frac{K^n}{1-K}\, \|y_1 - y_0\| \ .
\end{aligned}$$

Wählen wir also N so, daß

$$\frac{K^N}{1-K}\, \|y_1 - y_0\| < \varepsilon$$

ist, gilt die Voraussetzung des CAUCHYschen Konvergenzkriteriums mit diesem N für alle $\tau \in [t_0,\, t_1]$. Somit konvergiert die Folge der Funktionen $y_n(t)$ *punktweise* gegen eine Funktion $y(t)$. Für jedes $\tau \in [t_0,\, t_1]$ ist dann

$$\begin{aligned}
|y(\tau) - y_n(\tau)| &= \lim_{m\to\infty} |y_m(\tau) - y_n(\tau)| \le \lim_{m\to\infty} \|y_m - y_n\| \\
&\le \frac{K^n}{1-K}\, \|y_1 - y_0\| \ ,
\end{aligned}$$

die Folge konvergiert also in $[t_0,\, t_1]$ *gleichmäßig* gegen $y(t)$. Damit ist $y(t)$ eine stetige Funktion, und der Satz ist bewiesen. ■

STEFAN BANACH (1892–1945) wurde in Krakau geboren und ausgebildet, promovierte und arbeitete dann aber an der Universität von Lvov in der Ukraine, wo er unter schwierigen Bedingungen unter deutscher Besatzung den zweiten Weltkrieg verbrachte. Durch seine Arbeiten über lineare Operatoren und über Vektorräume von Funktionen wurde er zum Begründer der modernen Funktionalanalysis. Nach dem Krieg wollte er auf einen Lehrstuhl an der Universität Krakau wechseln, starb aber 1945 an Lungenkrebs. Das wichtigste mathematische Forschungsinstitut Polens, das Banach-Zentrum in Warschau, ist nach ihm benannt.

Als Anwendung erhalten wir den

Satz von Picard-Lindelöf: Die stetige Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \times [t_0,\, t_1] \to \mathbb{R} \\ \qquad (y,t) \mapsto f(y,t) \end{cases}$$

genüge einer LIPSCHITZ-Bedingung mit irgendeiner Konstanten $L \in \mathbb{R}$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\dot y(t) = f\big(y(t), t\big) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = c_0$$

für jedes $c_0 \in \mathbb{R}$ eine in $[t_0,\, t_1]$ eindeutig bestimmte Lösung.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß für den oben definierten Operator T mit

$$T(y)(t) \underset{\text{def}}{=} c_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(y(\tau), \tau\big)\, d\tau$$

und zwei beliebige stetige Funktionen z, w auf $[t_0,\, t_1]$

$$\|T(z) - T(w)\| \le K\, \|z - w\|$$

ist mit einer Konstanten $K < 1$. Links steht die Norm jener Funktion, die an der Stelle t den Wert

$$T(z)(t) - T(w)(t) = \int_{t_0}^{t} \Big(f\big(z(\tau), \tau\big) - f\big(w(\tau), \tau\big)\Big)\, d\tau$$

annimmt, und auf Grund der LIPSCHITZ-Bedingung ist

$$\left|f\big(z(\tau),\tau\big) - f\big(w(\tau),\tau\big)\right| \le L\,|z(\tau) - w(\tau)| \le L\,\|z - w\| \ .$$

Also ist für $t \in [t_0,\, t_1]$

$$\left|\int_{t_0}^{t}\Big(f\big(z(\tau),\tau\big) - f\big(w(\tau),\tau\big)\Big)\,d\tau\right| \le \int_{t_0}^{t} L\,\|z - w\|\,d\tau$$

$$= L\cdot(t - t_0)\,\|z - w\| \le L\cdot(t_1 - t_0)\,\|z - w\| \ .$$

Falls $L\cdot(t_1 - t_0)$ kleiner als eins ist, haben wir eine Konstante $K < 1$ gefunden und können den BANACHschen Fixpunktsatz anwenden; er liefert uns eine stetige Funktion $y(t)$, die der Bedingung

$$y(t) = c_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(y(\tau),\tau\big)\,d\tau$$

genügt. Da die rechte Seite wegen der Stetigkeit von f differenzierbar ist, haben wir sogar eine differenzierbare Funktion, und

$$\dot y(t) = f\big(y(t),t\big)\ .$$

Außerdem ist $y(t_0) = c_0$, da das Integral von t_0 bis t für $t = t_0$ verschwindet. Wir haben somit eine Lösung des Anfangswertproblems gefunden, und das ist die einzige Lösung, denn nach dem BANACHschen Fixpunktsatz hat T nur einen Fixpunkt.

Falls $L\cdot(t_1 - t_0)$ größer als eins ist, gibt es immerhin noch eine natürliche Zahl n, so daß $L\cdot(t_1 - t_0) < n$ ist. Wir unterteilen das Intervall $[t_0,\, t_1]$ in n gleich lange Teilintervalle $[\tau_i,\, \tau_{i+1}]$ mit Grenzen

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{n-1} < \tau_n = t_1\,,$$

d.h. $\tau_i = t_0 + \dfrac{i}{n}(t_1 - t_0)$.

Für jedes dieser Intervalle ist dann $L\cdot(\tau_{i+1} - \tau_i) < 1$, insbesondere ist also das Anfangswertproblem im Anfangsintervall $[\tau_0,\, \tau_1]$ eindeutig lösbar.

Für die entsprechende Lösung sei $y(\tau_1) = c_1$. Dann betrachten wir im Intervall $[\tau_1,\, \tau_2]$ das entsprechende Anfangswertproblem mit $y(\tau_1) = c_1$

und erhalten eine in diesem Intervall eindeutige Lösung und so weiter, bis wir die Lösung auf ganz $[t_0, t_1]$ ausgedehnt haben. ∎

ÉMILE PICARD (1856–1941) wurde in Paris geboren und hatte an der dortigen Universität auch seine erste Stelle, bis er 1878 eine Professur in Toulouse bekam. 1898 wurde er Professor an der Sorbonne und kehrte nach Paris zurück, wo er auch starb. Seine Arbeiten beschäftigen sich mit der Analysis (z.B. dem gerade bewiesenen Satz) und der Geometrie. Dort interessierte er sich für algebraische Flächen und die eng damit verbundenen algebraiscchen Funktionen zweier Veränderlichen sowie den zugehörigen Integralen. Weitere Arbeiten beschäftigen sich auch mit der Topologie von Flächen und wieder andere mit Anwendungen der Analysis in der Elektrodynamik, Wärmelehre und Elastizitätstheorie. Er war mit der Tochter von CHARLES HERMITE verheiratet.

ERNST LEONARD LINDELÖF (1870–1946) wurde in Helsinki geboren, als Finnland noch eine russische Provinz war. Sein Vater war Mathematikprofessor an der damals noch schwedischen (heute finnischen) Universität Helsingfors, an der später auch Lindelöf selbst sein Studium begann, unterbrochen durch Aufenthalte in Stockholm (1891), Paris (1893-1894) und Göttingen (1901). Der gerade bewiesene Satz stammt aus einer Arbeit von 1890; weitere Arbeiten beschäftigen sich mit analytischen Funktionen und Singularitäten. Nachdem er Professor in Helsingfors wurde, widmete er sich vor allem der Lehre und publizierte mehrere Bücher.

Die Anfangswertprobleme aus dem vorigen Abschnitt erfüllen offensichtlich allesamt *keine* LIPSCHITZ-Bedingung, denn sie sind ja nicht eindeutig lösbar. Im Falle von

$$\dot y(t) = \frac{1}{2y(t)} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0$$

ist

$$f(y,t) = \frac{1}{2y}\,,$$

also

$$|f(y_2,t) - f(y_1(t)| = \left|\frac{1}{2y_2} - \frac{1}{2y_1}\right| = \frac{1}{|2y_1y_2|}\,|y_2 - y_1|\ ,$$

und das kann man nur dann durch eine Schranke der Form $L\,|y_2 - y_1|$ abschätzen, wenn $1/\,|2y_1y_2|$ kleiner ist als L. In der Nähe des Nullpunkts kann $1/\,|2y_1y_2|$ aber beliebig groß werden, und somit kann hier keine LIPSCHITZ-Bedingung gelten.

Ähnlich verhält es sich beim Anfangswertproblem

$$\dot y(t) = 2\sqrt{|y(t)|} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0\,.$$

Hier ist

$$f(y,t) = 2\sqrt{|y(t)|}$$

zwar überall stetig, aber die Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y,t) = 2\frac{d}{dy}\sqrt{|y|} = \pm\frac{1}{\sqrt{|y|}}$$

mit Pluszeichen für $y > 0$ und Minuszeichen für $y < 0$ wächst bei Annäherung an den Nullpunkt betragsmäßig unbeschränkt, die Kurve wird also immer steiler, und damit zeigt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung, daß es keine LIPSCHITZ-Konstante geben kann.

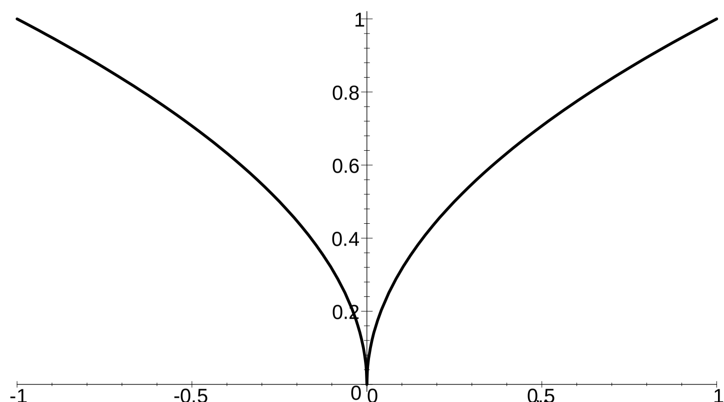

Abb. 36: Die Funktion $2\sqrt{|y|}$

Beim dritten Beispiel

$$\dot y(t) + \frac{y(t)}{2t^3} = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0$$

schließlich ist

$$f(y,t) = -\frac{y}{2t^3}\ ;$$

hier ist zwar die y-Abhängigkeit harmlos, aber

$$|f(y_2,t) - f(y_1,t)| = \frac{1}{|2t^3|}\,|y_2 - y_1|$$

läßt sich nicht durch durch eine Schranke der Form $L\,|y_2 - y_1|$ abschätzen, da $1/\,|2t^3|$ für t gegen null nicht beschränkt bleibt.

Obwohl in keinem der drei Fälle eine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt war, existierten doch immer Lösungen, und in der Tat reichen für die bloße Existenz von Lösungen deutlich schwächere Voraussetzungen als für Existenz und Eindeutigkeit. Nach einem Satz von PEANO etwa hat jedes Anfangswertproblem

$$\dot y(t) = f\big(y(t),t\big) \quad \text{und} \quad y(t_0) = c_0$$

mit *stetigem* f mindestens eine Lösung. Der Beweis arbeiter wieder mit einer Iteration, nutzt allerdings die gleichgradige Stetigkeit einer Folge aus, um die Existenz und die Stetigkeit der Grenzfunktion zu zeigen. Da nichteindeutige Lösungen für Anwendungen meist nutzlos sind, wollen wir hier auf diesen Beweis verzichten.

GUISEPPE PEANO (1858–1932) war Sohn eines Landarbeiters und wuchs auf einem Bauernhof nahe Cuneo im Piemont auf. 1870 brachte ihn ein Bruder seiner Mutter nach Turin, wo er weiterführende Schulen und schließlich die Universität besuchte. Dort wurde er 1880 Assistent und 1890 Professor. Den gerade erwähnten Existenzsatz bewies er 1886, und 1890 zeigte er, daß das Anfangswertproblem $\dot y(t) = 3y^{2/3}$ mit $y(0) = 0$ mehrere Lösungen hat. Die berühmten PEANO-Axiome für die natürlichen Zahlen veröffentlichte er 1889, und zwar aus unerfindlichen Gründen in lateinischer Sprache. Später beschäftigte er sich vor allem mit Logik.

c) Eindeutigkeitsprobleme für Systeme

Natürlich können alle Probleme, die wir vom Eindimensionalen her kennen, auch im Mehrdimensionalen auftreten; auch bei Systemen von Differentialgleichungen muß man sich also um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen Gedanken machen. Zum Glück geht alles fast genauso wie im eindimensionalen Fall.

Wir betrachten ein Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{y}}(t) = f\big(\vec{y}(t), t\big) \quad \text{und} \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

mit einer Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \times [t_0,\, t_1] \to \mathbb{R}^n\,.$$

Ausgeschrieben ist also

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(\vec{y}, t) = \begin{pmatrix} f_1(y_1, \dots, y_n, t) \\ \vdots \\ f_n(y_1, \dots, y_n, t) \end{pmatrix}$$

mit Funktionen $f_i\colon \mathbb{R}^n \times [t_0,\, t_1] \to \mathbb{R}$.

Wir versehen den $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumsnorm

$$\|\vec{v}\| = \max_{i=1}^{n} |v_i|$$

und sagen, die Funktion f oder auch das obige System erfülle eine LIPSCHITZ-Bedingung, wenn es eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $\vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \in [t_0,\, t_1]$ gilt

$$\big\| f\big(\vec{z}, t\big) - f((\vec{y}, t)\big\| \le L\,\|\vec{z} - \vec{y}\|\ .$$

Dann gilt auch hier der

Satz von Picard und Lindelöf: Falls f stetig ist und eine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt, hat jedes Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{y}}(t) = f\big(\vec{y}(t), t)\big) \quad \text{mit} \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

im Intervall $[t_0,\, t_1]$ eine eindeutig bestimmte Lösung.

Der *Beweis* geht fast wörtlich genauso wie im Eindimensionalen: Wir schreiben das System um als

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\vec{y}(\tau), \tau\big)\, d\tau\,,$$

wobei das Integral über einen Vektor von Funktionen einfach der Vektor der Integrale über die Komponenten sein soll:

$$\int_{t_0}^{t} f\big(\vec{y}(\tau), \tau\big)\, d\tau = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t} f_1\big(\vec{y}(\tau), \tau\big)\, d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t} f_n\big(\vec{y}(\tau), \tau\big)\, d\tau \end{pmatrix}.$$

Sodann definieren wir eine Supremumsnorm durch

$$\|\vec{y}(t)\| \underset{\text{def}}{=} \max_{i=1}^{n} \sup_{t\in[t_0,\,t_1]} |y_i(t)|\ ,$$

beweisen auch hierfür einen BANACHschen Fixpunktsatz und folgern schließlich daraus den Satz von PICARD und LINDELÖF. ■

d) Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen

Es gibt eine ganze Reihe von Typen elementar integrierbarer nichtlinearer Differentialgleichungen; die meisten davon sind allerdings außerhalb von Lehrbüchern über Differentialgleichungen nur selten anzutreffen. Zwei Ausnahmen sind wichtig genug, um hier behandelt zu werden: Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen und exakte Differentialgleichungen.

Wir betrachten zunächst Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen.

Darunter versteht man Differentialgleichungen der Form

$$\dot{y}(t) = f\big(y(t), t\big)\,,$$

bei denen sich die Funktion $f(y, t)$ als Produkt einer Funktion von y und einer Funktion von t schreiben läßt. Da die Funktion von y besser keine

Nullstellen haben sollte, setzen wir ihren Kehrwert in den Nenner und schreiben die Differentialgleichung somit als

$$\dot y(t) = \frac{g(t)}{h\big(y(t)\big)} .$$

Multiplikation mit dem Nenner und Integration führen auf

$$h\big(y(t)\big)\dot y(t) = g(t) \quad \text{und} \quad \int h\big(y(t)\big)\dot y(t)\,dt = \int g(t)\,dt .$$

Das linke Integral ist nach der Substitutionsregel einfach $\int h(y)\,dy$, wir erhalten also mit

$$\int h(y)\,dy = \int g(t)\,dt + C$$

eine Beziehung zwischen y und t. Damit sind die Lösungsfunktionen zumindest implizit dargestellt.

Falls eine Anfangsbedingung der Form $y(t_0) = y_0$ gegeben ist, können wir die spezielle Lösung mit dieser Anfangsbedingung auch direkt darstellen durch die Gleichung

$$\int_{y_0}^{y} h(\eta)\,d\eta = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau ,$$

die für $t = t_0$ und $y = y_0$ offensichtlich erfüllt ist.

Ein erstes Beispiel kennen wir bereits: Eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot y(t) = a(t)\cdot y(t)$$

mit $y(t) \neq 0$ läßt sich auf diese Form bringen mit

$$g(t) = a(t) \quad \text{und} \quad h(y) = \frac{1}{y} ;$$

wir erhalten also die Beziehung

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(t)\,dt \quad \text{oder} \quad \ln y = \int a(t)\,dt + C .$$

Diese Gleichung läßt sich durch Anwendung der Exponentialfunktion auflösen; wir erhalten das Ergebnis

$$y(t) = e^{\int a(t)\,dt + C} .$$

Als zweites Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot y(t) = -\frac{t}{y(t)} \quad \text{mit} \quad y(0) = 2 .$$

Trennung der Veränderlichen und Integration führt auf

$$\int_2^y \eta\,d\eta = -\int_0^t d\tau \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{2} - \frac{2^2}{2} = -\frac{t^2}{2} .$$

Dies führt auf

$$y(t)^2 = 4 - t^2 \quad \text{oder} \quad y(t) = \pm\sqrt{4 - t^2} ,$$

aber tatsächlich ist die Anfangsbedingung $y(0) = 2$ nur dann erfüllt, wenn in Pluszeichen vor der Wurzel steht, d.h.

$$y(t) = \sqrt{4 - t^2} .$$

Beim Auflösen der Gleichung nach y muß also nochmals die Anfangsbedingung ins Spiel gebacht werden, was eigentlich niemanden verwundern sollte: Eine nichtlineare Gleichung hat nur selten eine eindeutig bestimmte Lösung, wohingegen der Satz von PICARD-LINDELÖF zeigt, daß Anfangswertprobleme oft eindeutig lösbar sind. Von den mehreren Lösungen der impliziten Gleichung, die wir bei einer Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen bekommen, wird daher meist nur eine das Anfangswertproblem lösen.

Etwas komplizierter ist das Beispiel

$$\dot y(t) = \frac{1}{\cos^2 2t \cos^2 3y} ;$$

Hier erhalten wir

$$\int \cos^2 3y\,dy = \int \frac{dt}{\cos^2 2t} .$$

Partielle Integration links und die Erinnerung an die Ableitung des Tangens für das rechte Integral führen auf die Beziehung

$$\frac{1}{6}\cos 3y \sin 3y + \frac{y}{2} = \frac{1}{2}\tan 2t + C ,$$

die wir mittels der Beziehung

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

noch etwas vereinfachen können zu

$$y + \frac{1}{6} \sin 6y = \tan 2t + C' .$$

Trotzdem dürfte es ziemlich hoffnungslos sein, wenn wir versuchen, nach y aufzulösen. Die Auflösung nach t ist aber problemlos, so daß wir mit

$$t = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sin 6y}{6} + y - C' \right)$$

wenigstens die Umkehrfunktion der Lösungsfunktion explizit darstellen können.

Als letztes Beispiel schließlich wollen wir eine Differentialgleichung betrachten, die auch von unabhängigem Interesse ist, die *logistische Gleichung*

$$\dot{y}(t) = \lambda y(t)\bigl(K - y(t)\bigr) \quad \text{mit} \quad \lambda, K > 0 .$$

Sie beschreibt das Wachstum einer Population $y(t)$, deren Wachstumsrate sich immer weiter verlangsamt je mehr sich $y(t)$ an die Grenze K annähert. Für $y(t) = K$ ist $\dot{y}(t) = 0$, die Bevölkerungszahl bleibt also stabil, und für $y(t) > K$ ist $\dot{y}(t)$ negativ, d.h. die Bevölkerungszahl sinkt.

Dieses Modell wurde 1846 von dem belgischen Mathematiker PIERRE FRANÇOIS VERHULST (1804–1849) vorgeschlagen und unter anderem auf die Bevölkerungsentwicklung in Belgien angewandt. Er kam damals auf einen Schätzwert $K \approx 9\,400\,000$, der sich nicht sehr von der derzeitigen Bevölkerungszahl 10 300 000 *(Stand 2001)* unterscheidet

Da auf der rechten Seite der Differentialgleichung nur eine Funktion von y steht, haben wir trivialerweise eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen, und im interessanten Bereich

$$0 < y(t) < K$$

gibt es auch keine Probleme mit Nullstellen des Nenners. Wir erhalten damit

$$\int \frac{dy}{\lambda y(t)\bigl(K - y(t)\bigr)} = \int dt = t - t_0 ,$$

wobei der Grund für die Schreibweise der Integrationskonstante als $-t_0$ gleich klar werden wird.

Das Integral links kann durch Partialbruchzerlegung berechnet werden; da

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y} = \frac{K}{y(K-y)}$$

ist, folgt

$$\frac{1}{\lambda y(K-y)} = \frac{1}{\lambda K} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y} \right)$$

und

$$\int \frac{dy}{\lambda y(t)\bigl(K - y(t)\bigr)} = \frac{1}{\lambda K} \bigl(\ln y - \ln(K-y)\bigr) = \frac{1}{\lambda K} \ln \frac{y}{K-y} .$$

Die Umkehrfunktion der Lösungsfunktion ist also

$$t = t_0 + \frac{1}{\lambda K} \ln \frac{y}{K-y} .$$

Wir können auch nach y auflösen:

$$\frac{y}{K-y} = e^{\lambda K(t-t_0)} \Longrightarrow \frac{K-y}{y} = e^{-\lambda K(t-t_0)} \Longrightarrow \frac{K}{y} = 1 + e^{-\lambda K(t-t_0)} ,$$

und damit ist schließlich

$$y(t) = \frac{K}{1 + e^{-\lambda K(t-t_0)}} .$$

Speziell ist $y(t_0) = K/2$, die Integrationskonstante gibt also den Zeitpunkt an, zu dem die Population ihre halbe Maximalstärke erreicht hat.

Differenzieren der logistischen Differentialgleichung ergibt

$$\ddot{y}(t) = \lambda y(t)\bigl(-\dot{y}(t)\bigr) + \lambda \dot{y}(t)\bigl(K - y(t)\bigr) = \lambda \dot{y}(t)\bigl(K - 2y(t)\bigr) ,$$

die Wachstumsrate $\dot{y}(t)$ steigt also, solange $y(t) < K/2$ oder $t < t_0$ ist, danach beginnt sie zu sinken. Dementsprechend ist der Graph der

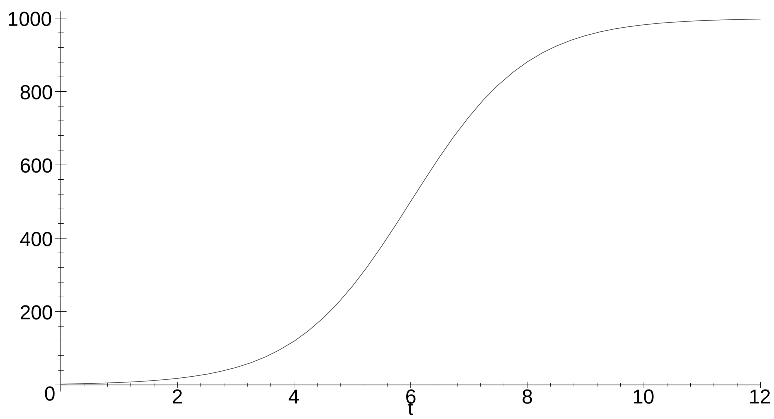

Abb. 37: Eine Lösungskurve der logistischen Differentialgleichung

Lösungsfunktion $y(t)$ konkav für $t < t_0$ und konvex für $t > t_0$; bei $t = t_0$ sitzt der einzige Wendepunkt. Da diese Kurvenform an ein langestrecktes S erinnert, spricht man von einer *sigmoiden* Kurve; der Leser kann sich aussuchen, ob er sich eher an σ, ς oder Σ erinnert fühlt.

Solche Kurven werden beispielsweise bei Erneuerungsprozessen oft beobachtet; ist etwa $y(t)$ = Prozentsatz aller in Frage kommender Personen oder Firmen, die zum Zeitpunkt t bereits eine technische oder sonstige Neuerung eingeführt haben, so genügt auch $y(t)$ ungefähr einer logistischen Gleichung. Dies erscheint plausibel, denn ein potentieller Anwender erfährt von der Neuerung im Gespräch mit jemandem, der sie schon eingeführt hat; es gibt am Anfang also um so mehr Zuwachs bei $y(t)$ je größer $f(t)$ ist. Andererseits kann ein Prozentsatz nie größer als 100 werden, so daß die Steigerungsrate gegen Null gehen muß, wenn sich $y(t)$ der 100%-Grenze nähert. Vergleiche zwischen diesem Modell und vielen tatsächlichen Erneuerungsprozessen findet man etwa bei

C.T. FISCHER, R.H. PRY: A simple substitution model of technological change, *Technological Forecasting and Social Changes* **3** (1971), 75–88.

VERHULST führte die logistische Gleichung, wie bereits erwähnt, zur Modellierung des Bevölkerungswachstums ein, allerdings zeigen weder die Daten für die Bundesrepublik Deutschland noch die für die

Weltbevölkerung eine gute Übereinstimmung mit diesem Modell. Seit 1940 immer wieder als Beispiel zitiert wird aber die Bevölkerung der Vereinigten Staaten von Amerika, das wir uns deshalb etwas genauer anschauen wollen:

Die Vereinigten Staaten führen seit 1790 in jedem zehnten Jahr einen „Census“ durch, in dessen Rahmen insbesondere auch die Gesamteinwohnerzahl festgestellt wird; sie bieten daher ein ideales Beispiel, für einen über einen langen Zeitraum hinweg dokumentierten Wachtumsprozess. Zwar hat sich das Territorium der USA seit 1790 gewaltig vergrößert, aber da Staaten wie das 1867 für \$7 200 000 dazugekaufte Alaska kaum Einwohner haben, ist der Effekt dieser Änderungen auf die Bevölkerungszahlen fast vernachlässigbar – besonders wenn man bedenkt, daß Volkszählungsdaten notorisch unzuverlässig sind. Wir betrachten daher die Daten, wie sie bei den einzelnen Volkszählung für das jeweils aktuelle Territorium ermittelt wurden.

Das U.S. Department of Commerce, Bureau of the Census, veröffentlicht diese Daten ohne jegliche Rundung; in der folgenden Tabelle sind sie zur besseren Übersicht auf volle Hunderttausender gerundet und in Einheiten von einer Million Einwohner angegeben.

Bevölkerungsentwicklung in den USA 1790–2000

Jahr:	1790	1800	1810	1820	1830	1840
Bevölkerung:	3,9	5,3	7,2	9,6	12,9	17,1
Jahr:	1850	1860	1870	1880	1890	1900
Bevölkerung:	23,2	31,4	38,6	50,2	63,0	76,2
Jahr:	1910	1920	1930	1940	1950	1960
Bevölkerung:	92,2	106,0	123,2	132,2	151,3	179,3
Jahr:	1970	1980	1990	2000		
Bevölkerung:	203,3	226,5	248,7	281,4		

Quelle: http://www.census.gov/main/www/cen2000.html

Die graphische Darstellung in Abbildung 38 zeigt die Datenpunkte zusammen mit einer logistischen Kurve; wie man sieht, ist die Überein-

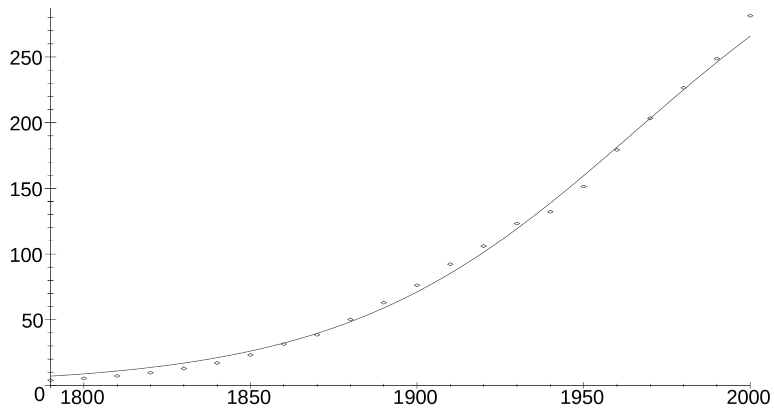

Abb. 38: U.S. Population Census 1790–2000 mit logistischer Kurve

stimmung recht gut, aber bei weitem nicht perfekt.

Eine bessere Modellierung mit *zwei* logistischen Kurven zeigt Abbildung 39: Die erste Kurve, die den Datenpunkten bis 1940 angepaßt ist, hat eine Grenzkapazität K von 190 Millionen Einwohner, die zweite, für die Daten ab 1950, hat $K = 356$ Millionen.

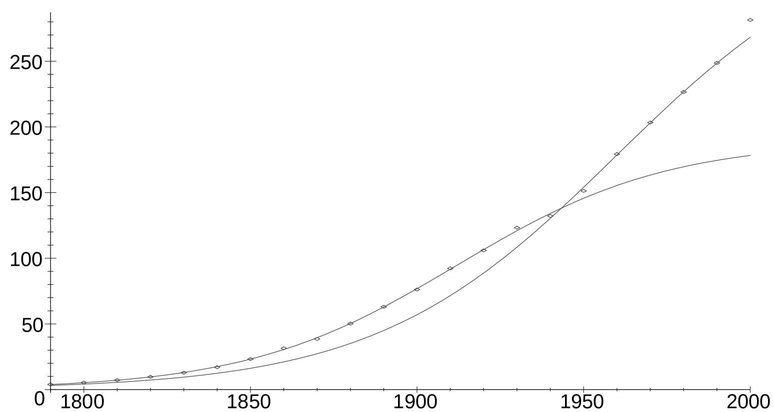

Abb. 39: U.S. Population Census 1790–2000 mit zwei logistischen Kurven

Historisch ist diese Beinahe-Verdoppelung leicht zu erklären: Schließlich gingen die USA aus dem zweiten Weltkrieg als Weltmacht hervor, und eine solche hat die Macht, auch teilweise auf Kosten anderer Staaten zu leben. Von daher erscheint es durchaus nachvollziehbar, daß sich die Grenzkapazität des Systems USA nach dem zweiten Weltkrieg deutlich vergrößert hat.

Erklärungsbedürftig ist auch der deutlich über der Kurve liegende Wert für 2000. Anhand der vorhandenen Daten läßt sich allerdings nicht beurteilen, ob es sich hier um den Beginn eines neuen Trends handelt, oder ob die ermittelte Bevölkerungszahl für das Jahr 2000 womöglich einfach dadurch zu erklären ist, daß die Vereinigten Staaten im Jahr 2000 Probleme mit dem Zählen hatten. Wenn in fünfzig Jahren fünf weitere Werte vorliegen, wird man mehr sagen können.

e) Exakte Differentialgleichungen und integrierende Faktoren

Im letzten Abschnitt ließ sich die Lösung einer Differentialgleichung gelegentlich nur in der impliziten Form $\Phi(y,t,C) = 0$ angeben, wobei C die Integrationskonstante war.

Falls die Lösungsfunktionen, wie dies im allgemeinen der Fall sein wird, wirklich von C abhängen, kann die partielle Ableitung von Φ nach C nicht überall verschwinden; der Satz über implizite Funktionen (**[HM I]**, *Kap. 2, §1d*) sagt uns, daß die Gleichung $\Phi(y,t,C) = 0$ überall dort nach C aufgelöst werden kann, wo diese partielle Ableitung von Null verschieden ist. Dort lassen sich die Lösungen mit einer geeigneten Funktion F also auch in der Form

$$F(y,t) = C$$

schreiben.

Umgekehrt können wir jede Kurvenschar, die durch eine Gleichung dieser Art implizit gegeben ist, als Lösungsmenge einer linearen Differentialgleichung interpretieren: Setzen wir für y eine Funktion $y(t)$ ein, so ist nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}F\big(y(t),t\big) = \frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t),t\big)\cdot\dot y(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t),t\big)\,.$$

Da $F\big(y(t),t\big) = C$ konstant ist, muß dies verschwinden; die gesuchte Differentialgleichung ist also

$$\frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t),t\big)\cdot\dot y(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t),t\big) = 0\,.$$

Andererseits verschwindet die Ableitung einer Funktion genau dann, wenn die Funktion konstant ist; die Lösungen dieser Differentialgleichung sind also genau die Funktionen, die (in impliziter Form) gegeben sind durch

$$F\big(y(t),t\big) = C \quad \text{mit} \quad C\in\mathbb{R}\,.$$

Als Beispiel betrachten wir die Schar von Kreisen

$$y^2 + t^2 = r^2 \quad \text{mit} \quad r\in\mathbb{R}\,.$$

Hier ist $F(y,t) = y^2 + t^2$, also erhalten wir die Differentialgleichung

$$2y(t)\cdot\dot y(t) + 2t = 0\,,$$

was sich auch als

$$y(t)\cdot\dot y(t) = -t$$

schreiben läßt. In dieser Form haben wir eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen; Integration links und rechts liefert

$$\int y\,dy = -\int t\,dt \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + C\,.$$

Da die Summe zweier Quadrate nicht negativ sein kann, hat diese Gleichung nur für $C \ge 0$ eine Lösung (wobei der Fall $C = 0$ in unserem Zusammenhang nichts Brauchbares liefert), also können wir $C = r^2/2$ setzen und erhalten dann genau die obigen Kreisgleichungen.

Hier ist die implizite Lösung sogar nützlicher als die explizite: Offenbar gibt es durch jeden Punkt (t_0, y_0) genau eine Lösungskurve. Auflösen nach y dagegen liefert die *beiden* Lösungen

$$y(t) = \pm\sqrt{r^2 - t^2}\,,$$

wobei man jeweils anhand der Anfangsbedingung das richtige Vorzeichen finden muß. Für eine Anfangsbedingung $y(t_0) = c_0$ mit $c_0 \neq 0$ ist

das einfach das Vorzeichen von c_0; für $c_0 = 0$ aber lösen beide Funktionen

$$y_1(t) = \sqrt{r^2 - t_0^2} \quad \text{und} \quad y_2(t) = -\sqrt{r^2 - t_0^2}$$

das Anfangswertproblem. Dies entspricht natürlich genau dem, was wir nach dem Satz von PICARD-LINDELÖF erwarten, denn die rechte Seite der Differentialgleichung

$$\dot y(t) = \frac{-t}{y(t)}$$

erfüllt überall dort eine LIPSCHITZ-Bedingung, wo y nicht verschwindet.

In diesem Abschnitt wollen wir uns allgemein mit Differentialgleichungen beschäftigen, deren Lösungen implizit in der Form

$$F(y,t) = C \quad \text{mit} \quad C\in\mathbb{R}$$

dargestellt werden können.

Wie wir oben gesehen haben, ist

$$\frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t),t\big)\cdot\dot y(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t),t\big) = 0$$

eine Differentialgleichung mit diesen Lösungen; eine solche Differentialgleichung bezeichnen wir als *exakt:*

Definition: Die Differentialgleichung

$$a(y,t)\dot y(t) + b(y,t) = 0$$

heißt *exakt,* wenn es eine differenzierbare Funktion $F(y,t)$ gibt mit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,t) = a(y,t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(y,t) = b(y,t)\,.$$

Zu diesen exakten Differentialgleichungen zählen insbesondere auch die Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen aus dem letzten Abschnitt. Diese hatten wir in der Form

$$h\big(y(t)\big)\dot y(t) = g(t) \quad \text{oder} \quad h\big(y(t)\big)\dot y(t) - g(t) = 0$$

geschrieben; mit

$$F(y,t) = \int h(y)\,dy - \int g(t)\,dt$$

ist hier gerade

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,t) = h(y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(y,t) = -g(t)\,.$$

Andererseits ist aber nicht jede Differentialgleichungen der Form

$$a(y,t)\dot y(t) + b(y,t) = 0 \qquad (\star)$$

exakt: Das ist sie nur, wenn es eine Funktion $F(y,t)$ gibt mit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,t) = a(y,t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(y,t) = b(y,t)$$

d.h.

$$\nabla F(y,t) = \operatorname{grad} F(y,t) = \begin{pmatrix} a(y,t) \\ b(y,t) \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichung $(\star)$ ist also genau dann exakt, wenn das Vektorfeld $\binom{a(y,t)}{b(y,t)}$ eine Stammfunktion hat.

Dies kann für stetig differenzierbare Funktionen a und b nach dem Lemma von SCHWARTZ (**[HM I]**, Kapitel 2, §2) nur dann der Fall sein, wenn

$$\frac{\partial a}{\partial t}(y,t) = \frac{\partial b}{\partial y}(y,t)$$

ist. Umgekehrt reicht diese Bedingung nach **[HM I]**, Kapitel 2, §6*f)* aus für die Existenz einer Stammfunktion, *falls* das Vektorfeld auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiert ist, falls es also keine Löcher im Definitionsbereich gibt, wie sie etwa durch Nullstellen von Nennern verursacht sein können. Insbesondere reicht die Bedingung also aus, wenn beide Funktionen auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert sind oder in einem Rechteck oder einer Kreisscheibe.

Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$te^{-ty(t)}\dot y(t) + 6t^2 + ye^{-ty(t)} = 0\,.$$

Diese Gleichung ist exakt, denn beide Koeffizientenfunktionen sind auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert und

$$\frac{\partial}{\partial t} te^{-ty(t)} = \frac{\partial}{\partial y}(6t^2 + ye^{-ty(t)}) = e^{-ty(t)} - tye^{-ty(t)}\,.$$

Für die Stammfunktion F des Vektorfelds ist einerseits

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,t) = te^{-ty}, \quad \text{also} \quad F(y,t) = -e^{-ty} + h_1(t)$$

mit irgendeiner nur von t abhängigen Funktion h_1, und andererseits

$$\frac{\partial F}{\partial t}(y,t) = 6t^2 + ye^{-ty(t)}, \quad \text{also} \quad F(y,t) = 2t^3 - e^{-ty} + h_2(y)$$

mit irgendeiner nur von y abhängigen Funktion h_2. Abgesehen von einer additiven Konstanten, die wir nach Belieben addieren können, passen diese beiden Gleichungen für $F(y,t)$ genau dann zusammen, wenn

$$F(y,t) = 2t^3 - e^{-ty}$$

ist; für die Lösungsfunktionen der Differentialgleichung ist also

$$F\big(y(t),t\big) = 2t^3 - e^{-ty(t)} = C \quad \text{oder} \quad e^{-ty(t)} = 2t^3 - C$$

mit einer beliebigen Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

In diesem Fall läßt sich die implizite Gleichung unschwer nach $y(t)$ auflösen; wir erhalten

$$y(t) = -\frac{\ln(2t^3 - C)}{t} \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Genau wie nur wenige Vektorfelder Stammfunktionen haben, sind auch nur wenige Differentialgleichungen exakt. Beispiel einer nichtexakten Differentialgleichung der Form $(\star)$ ist etwa

$$t^2 y(t)\dot y(t) + t^3 = 0 \quad \text{mit} \quad a(y,t) = t^2 y \ \text{ und } \ b(y,t) = t^3\,,$$

denn hier ist

$$\frac{\partial a}{\partial t}(y,t) = 2ty, \quad \text{aber} \quad \frac{\partial b}{\partial y}(y,t) = 0\,.$$

Trotzdem können wir diese Differentialgleichung lösen: Wenn wir durch t^2 dividieren, erhalten wir die obige Differentialgleichung für konzentrische Kreise um den Nullpunkt, und da eine differenzierbare Funktion durch ihre Werte für $t \neq 0$ auch im Nullpunkt eindeutig festgelegt ist, verlieren wir durch die Division keine Lösungen.

Auch die Differentialgleichung

$$t^2\dot y(t) + ty + 1 = 0$$

ist nicht exakt, da

$$\frac{\partial t^2}{\partial t} = 2t \quad \text{und} \quad \frac{\partial(ty+1)}{\partial y} = t$$

voneiander verschieden sind. Multipliziert man die Gleichung aber mit e^{ty}, so wird sie exakt, denn

$$\frac{\partial(t^2e^{ty})}{\partial t} = \frac{\partial(ty+1)e^{ty}}{\partial y} = (t^2y+2t)e^{ty}\,,$$

und in der Tat sind t^2e^{ty} und $(ty+1)e^{ty}$ die partiellen Ableitungen von $F(y,t) = te^{ty}$ nach y und nach t.

An den Lösungen der Gleichung ändert sich durch die Multiplikation mit der nirgends verschwindenden Funktion e^{ty} nichts, sie sind also also gegeben durch die implizite Gleichung

$$te^{ty(t)} = C$$

oder explizit durch

$$y(t) = \frac{1}{t}\ln\frac{C}{t}\,,$$

wie man sich leicht durch Einsetzen überzeugen kann. Diese Lösung existiert bei positivem C nur für $t > 0$, bei negativem nur für $t < 0$. Für $C = 0$ definiert $te^{ty(t)} = 0$ keine Funktion $y(t)$.

Wenn eine Differentialgleichung, wie in diesen beiden Beispielen, durch Multiplikation mit einer Funktion $\varphi(y,t)$ exakt gemacht werden kann, nennt man $\varphi(y,t)$ einen *integrierenden Faktor.* Ihn zu finden, kann im

allgemeinen sehr schwierig sein: Einen einfach zusammenhängenden Definitionsbereich vorausgesetzt, ist die Gleichung

$$\varphi\big(y(t),t\big)\,a\big(y(t),t\big)\,\dot y(t) + \varphi\big(y(t),t\big)\,b\big(y(t),t\big) = 0$$

genau dann exakt, wenn die partiellen Ableitungen des ersten Koeffizienten nach t und des zweiten Koeffizienten nach y miteinander übereinstimmen, wenn also

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(y,t)\cdot a(y,t) + \varphi(y,t)\frac{\partial a(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,t)\cdot b(y,t) + \varphi(y,t)\frac{\partial b(y,t)}{\partial y}$$

ist. Diese Gleichung für gegebene Funktionen a und b zu lösen ist leider fast aussichtslos; lediglich in speziellen Fällen kann man eine eine Lösung wirklich hinschreiben. Dazu gehört insbesondere der Fall, daß φ nur von einer der beiden Variablen abhängt:

Sucht man ein φ, das nur von t abhängt, vereinfacht sich die obige Gleichung zu

$$\dot\varphi(t)\cdot a(y,t) = \varphi(t)\left(\frac{\partial b(y,t)}{\partial y} - \frac{\partial a(y,t)}{\partial t}\right)$$

oder

$$\frac{\dot\varphi(t)}{\varphi(t)} = \frac{\frac{\partial b(y,t)}{\partial y} - \frac{\partial a(y,t)}{\partial t}}{a(y,t)}\,.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist die Ableitung von $\ln\varphi(t)$; falls die rechte Seite unabhängig von y ist, also nur eine Funktion $\psi(t)$, so ist also

$$\varphi(t) = e^{\int\psi(t)\,dt}\,.$$

Entsprechend kann man argumentieren, wenn φ nur von y abhängen soll; bezeichnen wir die Ableitung nach y durch einen Strich, wird dann die Gleichung zu

$$\varphi'(y)\cdot b(y,t) = \varphi(y)\left(\frac{\partial a(y,t)}{\partial t} - \frac{\partial b(y,t)}{\partial y}\right)$$

oder

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \frac{\frac{\partial a(y,t)}{\partial t} - \frac{\partial b(y,t)}{\partial y}}{b(y,t)}\,.$$

Falls die rechte Seite nicht von t abhängt, also eine Funktion $\omega(y)$ ist, folgt wie oben

$$\varphi(y) = e^{\int \omega(y)\,dy} .$$

Ist also

$$\frac{\frac{\partial b(y,t)}{\partial y} - \frac{\partial a(y,t)}{\partial t}}{a(y,t)} \quad \text{unabhängig von } y$$

oder

$$\frac{\frac{\partial a(y,t)}{\partial t} - \frac{\partial b(y,t)}{\partial y}}{b(y,t)} \quad \text{unabhängig von } t\,,$$

läßt sich ein integrierender Faktor auch algorithmisch produzieren; ansonsten kann sich die Suche als schwierig erweisen.

Für die oben betrachtete Differentialgleichung

$$t^2\dot{y}(t) + ty + 1 = 0$$

beispielsweise ist $a(y,t) = t^2$ und $b(y,t) = ty + 1$, also

$$\frac{\frac{\partial a(y,t)}{\partial t} - \frac{\partial b(y,t)}{\partial y}}{b(y,t)} = \frac{t}{ty+1}$$

auch von t abhängig, so daß es keinen integrierenden Faktor gibt, der nur von y abhängt. Da aber

$$\frac{\frac{\partial b(y,t)}{\partial y} - \frac{\partial a(y,t)}{\partial t}}{a(y,t)} = \frac{-t}{t^2} = -\frac{1}{t}$$

nur von t abhängt, gibt es einen integrierenden Faktor, der nur von t abhängt, nämlich

$$\varphi(t) = e^{-\int \frac{dt}{t}} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t} .$$

In der Tat ist

$$t\dot{y}(t) + y + \frac{1}{t} = 0$$

eine exakte Differentialgleichung, und

$$F(y,t) = yt + \ln t$$

ist eine Stammfunktion, die (abgesehen von der etwas anderen Form der Integrationskonstanten) auf dieselbe Lösung, die wir oben mit einem etwas anderen F hergeleitet haben F.

Integrierende Faktoren, die sowohl von y als auch von t abhängen, können gelegentlich über Symmetriebetrachtungen gefunden werden: Die Differentialgleichung

$$a(y,t)\dot{y}(t) + b(y,t) = 0$$

habe die (unbekannte) Lösung $F(y,t) = C$ mit $C \in \mathbb{R}$. Angenommen, wie kennen eine Transformation der Koordinaten, die in Abhängigkeit von einem Paramter ε eine Lösungskurve $F(y,t) = C$ überführt in eine neue Lösungskurve $F(y_\varepsilon, t_\varepsilon) = C_\varepsilon$, wobei $\varepsilon = 0$ der Ausgangslösung entsprechen soll. Nach dem Satz über implizite Funktionen können wir dann auch eine Transformation finden, für die $C_\varepsilon = C + \varepsilon$ ist. Es könnte schwierig sein, so eine Transformation explizit anzugeben; es reicht uns allerdings, wenn wir sie nur in erster Näherung kennen, d.h. bis auf Terme, die schneller gegen null gehen als ε:

$$y_\varepsilon = y + \varepsilon\eta(y,t) + o(\varepsilon) \quad \text{und} \quad t_\varepsilon = t + \varepsilon\tau(y,t) + o(\varepsilon) .$$

Dann ist

$$C + \varepsilon = F(y_\varepsilon, t_\varepsilon) = F(y,t) + \varepsilon\big(F_y(y,t)\eta(y,t) + F_t(y,t)\tau(y,t)\big) + o(\varepsilon) ,$$

also

$$F_y(y,t)\eta(y,t) + F_t(y,t)\tau(y,t) = 1 . \qquad (*)$$

Außerdem ist nach dem Satz über implizite Funktionen

$$\dot{y}(t) = -\frac{F_t(y,t)}{F_y(y,t)} ;$$

da $y(t)$ Lösung der Differentialgleichung ist, folgt

$$-a(y,t)\frac{F_t(y,t)}{F_y(y,t)} + b(y,t) = 0$$

oder

$$-b(y,t)F_y(y,t) + a(y,t)F_t(y,t) = 0 .$$