und die Matrix A hat bezüglich der Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_5\}$ die Gestalt

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den beiden JORDAN-Kästchen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

§3: Lineare Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme

a) Systeme homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Beliebige Systeme homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten können genauso behandelt werden wie das Beispiel aus §2*g)*, und eigentlich wissen wir bereits alles, was wir brauchen. Trotzdem seien die wesentlichen Punkte hier noch einmal zusammenfassend dargestellt:

Wir betrachten ein Differentialgleichungssystem

$$\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t) ,$$

wobei A eine reelle oder komplexe $n \times n$-Matrix ist. Zumindest über den komplexen Zahlen zerfällt ihr charakteristisches Polynom in Linearfaktoren, es gibt also eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^n$, bezüglich derer A als obere Dreiecksmatrix geschrieben werden kann.

Ist B die komplexe $n \times n$-Matrix, deren Spalten die Vektoren aus $\mathcal{B}$ sind, ist dann also

$$A = BCB^{-1}$$

mit einer Dreiecksmatrix $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist auch

$$e^{At} = Be^{Ct}B^{-1} ,$$

und e^{Ct} kann berechnet werden, da $C = D + N$ Summe einer Diagonalmatrix und einer damit kommutierenden oberen Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen ist. Insgesamt ist also

$$e^{At} = Be^{Dt}e^{Nt}B^{-1} ,$$

und jeder der vier Faktoren rechts ist in endlich vielen Schritten berechenbar.

Wie wir weiterhin wissen, hat jede Lösung der Differentialgleichung $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ die Form

$$\vec{y}(t) = e^{At}\vec{y}_0 \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{y}_0 = \vec{y}(0) \in \mathbb{C}^n ;$$

wir kennen also alle Lösungen des Systems. Falls Anfangsbedingungen vorgegeben sind, die sich auf einen beliebigen Zeitpunkt $t = t_0$ beziehen, können wir die Lösung entsprechend schreiben als

$$\vec{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{y}(t_0) .$$

Solange wir in der Lage sind, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A zu berechnen, können wir also jedes Anfangswertproblem in Gestalt eines Systems linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lösen.

b) Langzeitverhalten der Lösung

Nicht immer ist es notwendig oder auch nur möglich, ein Differentialgleichungssystem zur exakten numerischen Vorhersage der weiteren Entwicklung eines Systems zu verwenden; gelegentlich reicht auch ein qualitativer Überblick. Dabei geht es vor allem um das Langzeitverhalten des Systems: Nähert es sich einem Gleichgewicht, „explodiert“ es, oder wird es auf lange Sicht periodisch, wie wir es etwa vom Fall der erzwungenen Schwingung her kennen.

Für solche Aussagen reicht es im Falle eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$, die Eigenwerte der Matrix A zu kennen: Bezüglich einer Basis aus Hauptvektoren läßt sich A in der Form $D + N$ schreiben mit einer Diagonalmatrix D, für die e^{Dt} Diagonalmatrix ist mit den Funktionen $e^{\lambda t}$ als Einträgen, wobei λ die

Eigenwerte von A durchläuft. Die Matrix e^{Nt} hat Polynome in t als Einträge; das Produkt $e^{Dt}e^{Nt}$ hat also wegen der speziellen Formen von D und N Produkte von Polynomen in t mit e^{λ^t} als Einträge, wobei der Grad des Polynoms höchstens die um eins verminderte größte Stufe eines Hauptvektors zu λ ist. Bei der Rücktransformation auf die Ausgangsbasis entstehen Linearkombinationen solcher Funktionen, die bei der Multiplikation mit dem Vektor der Anfangswerte selbst wieder linear kombiniert werden. Insgesamt ist also jede Lösungsfunktion eine Linearkombination von Termen der Form $t^j e^{\lambda t}$.

Falls nur ein Eigenwert λ von A positiven Realteil hat, muß das System fast unweigerlich explodieren, da der Betrag von $e^{\lambda t}$ für hinreichend großes t jede vorgegebene Grenze überschreitet. Zwar sind eventuell Anfangsbedingungen möglich, bei denen $e^{\lambda t}$ nicht in der Lösung des Anfangswertproblems auftritt, aber da die Anfangswerte in der Praxis nie durch Naturgesetze gegeben sind, sondern durch fehlerbehaftete Meßwerte, kann schon eine kleine Störung den Term $e^{\lambda t}$ wieder ins Spiel bringen, und auch für sehr kleines c dominiert $ce^{\lambda t}$ langfristig jede beschränkte Funktion.

Haben dagegen *alle* Eigenwerte von A negativen Realteil, geht jeder Term $t^j e^{\lambda t}$ gegen Null für $t \to \infty$ und damit auch jede Lösungsfunktion; der Lösungsvektor nähert sich also immer mehr der Gleichgewichtslösung $\vec{y}(t) \equiv 0$.

Bleibt noch der Fall von Eigenwerten mit Realteil null. Hier werden die bei mehrfachen Eigenwerten möglichen Polynome wichtig, denn während der Betrag von $e^{\lambda t}$ konstant ist, geht der Betrag der mit einem nichtkonstanten Polynom multiplizierten Funktion gegen $\pm\infty$.

Schließlich sollten wir auch die Imaginärteile der Eigenwerte nicht ganz vergessen: Falls A, wie in den meisten Anwendungen, eine reelle Matrix ist, ist mit jedem nichtreellen Eigenwert λ auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert derselben Vielfachheit wie λ. Mit $\lambda = a + ib$ ist

$$e^{\lambda t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \quad \text{und} \quad e^{\overline{\lambda} t} = e^{at}(\cos bt - i \sin bt)\,,$$

jede Linearkombination von $e^{\lambda t}$ und $e^{\overline{\lambda} t}$ läßt sich also auch als Linearkombination der beiden reellen Funktionen

$$e^{at} \cos bt \quad \text{und} \quad e^{at} \sin bt$$

schreiben. Die Imaginärteile bringen also Schwingungsanteile in die Lösungsfunktionen.

Um einen ersten Eindruck vom Lösungsverhalten linearer homogener Differentialgleichungssysteme mit reellen Koeffizienten zu bekommen, wollen wir uns überlegen, was in niedrigen Dimensionen möglich ist.

Im Eindimensionalen besteht das „System“ einfach aus der Differentialgleichung $\dot{y}(t) = ay(t)$ mit Lösung $y(t) = y(0)e^{at}$; für $a > 0$ geht dies je nach Vorzeichen von $y(0)$ gegen plus oder minus unendlich für $t \to \infty$, für $a < 0$ gegen null, und für $a = 0$ ist $y(t) = y(0)$ konstant.

Etwas interessanter ist es im Zweidimensionalen: Hier hat die Matrix A einen oder zwei Eigenwerte.

Falls es nur einen gibt und dieser die geometrische Vielfachheit zwei hat, ändert sich nichts wesentliches gegenüber der eindimensionalen Situation: Die Lösungsfunktion ist $\binom{x(0)}{y(0)} \cdot e^{\lambda t}$.

Falls der Eigenwert nur die algebraische Vielfachheit eins hat, sind die Lösungsfunktionen Linearkombinationen von $e^{\lambda t}$ und $te^{\lambda t}$, also Produkte lineare Funktionen mit $e^{\lambda t}$. Jetzt können die Lösungen auch im Fall $\lambda = 0$ unbeschränkt werden.

Wenn es zwei verschiedene Eigenwerte gibt, können diese entweder beide reell oder aber konjugiert komplex sein.

Im reellen Fall können beide positiv sein; dann geht jede nichttriviale Lösung ins Unendliche, oder aber beide können negativ sein; dann nähert sich jede Lösung immer mehr dem Nullpunkt. Alternativ könnte einer positiv und einer negativ sein; in diesem Fall nähern sich alle Lösungskurven einer Geraden, gehen aber mit dieser ins Unendliche. Schließlich könnte noch ein Eigenwert null sein; dann liegen alle Lösungskurven auf Geraden und gehen dort je nach Vorzeichen des anderen Eigenwerts gegen einen festen Punkt oder aber ins Unendliche.

Bleibt noch der Fall zweier konjugiert komplexer Eigenwerte $a \pm ib$; in diesem Fall sind die Lösungsfunktionen Linearkombinationen von $e^{at}\cos t$ und $e^{at}\sin t$.

Für $a = 0$ haben wir einfach reine Schwingungen; falls die beiden Eigenvektoren senkrecht aufeinander stehen, bekommen wir als Lösungskurven Kreislinien, ansonsten affine Verzerrungen davon, also Ellipsen.

Für $a \neq 0$ ergeben sich entsprechend Spiralen, die je nach Vorzeichen von a entweder ins Unendliche gehen oder aber sich auf den Nullpunkt zusammenziehen.

Betrachten wir als Beispiel das System

$$\dot{x}(t) = -10{,}2x(t) - 25y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = 5x(t) + 9{,}8y(t)\,.$$

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -10\frac{1}{5} & -25 \\ 5 & 9\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

hat das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + \frac{2}{5}\lambda + 25\frac{1}{5}$$

mit Nullstellen $-\frac{1}{5} \pm 5i$, die Lösungskurven sind also sich nach innen zusammenziehende Spiralen. Mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $y(0) = 1$ erhalten wir die Lösung

$$x(t) = -5e^{-t/5}\sin 5t \quad \text{und} \quad y(t) = e^{-t/5}(\cos 5t + 2\sin 5t)\,,$$

die in Abbildung 30 zu sehen ist.

Im Dreidimensionalen gibt es entsprechend mehr Möglichkeiten; ich möchte auf die weniger interessanten Fälle mit lauter reellen Eigenwerten verzichten und nur den betrachten, daß zwei konjugiert komplexe auftreten, etwa $a \pm ib$. Der dritte Eigenwert λ muß dann natürlich reell sein.

Falls er null ist, sind wir im wesentlichen in der zweidimensionalen Situation: Da dann in Richtung des dritten Eigenvektors alles konstant ist, spielt sich alles in einer Ebenen ab, die parallel zu der von den ersten beiden Eigenvektoren aufgespannten liegt.

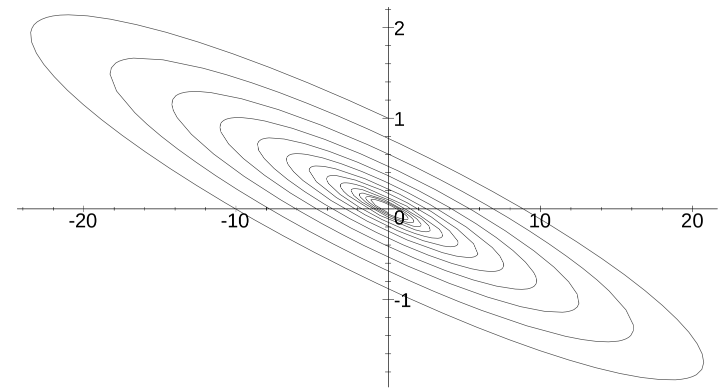

Abb. 30: Spiralförmige Annäherung an den Nullpunkt

Falls er negativ ist, nähert sich in Richtung des dritten Eigenvektors alles der Ebenen, in der dessen Koordinate null ist, die also von den beiden anderen Eigenvektoren aufgespannt wird, und dort ist die Dynamik je nach Vorzeichen von a spiralförmig nach innen oder außen oder einfach ellipsenförmig. Abbildung 31 zeigt den Fall $a = -1/10, b = 2$ und $\lambda = -1/6$; die Eigenvektoren zeigen in Richtung der Koordinatenachsen.

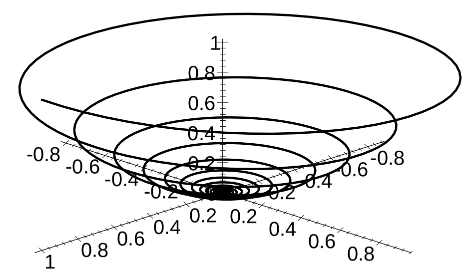

Abb. 31: Spiralförmige Annäherung an den Nullpunkt im Dreidimensionalen

In Abbildung 32 ist $a = +1/10$ und ansonsten alles unverändert; wie man sieht, nähert sich nun die Lösungskurve zwar der (x, y)-Ebenen, geht in dieser aber spiralförmig ins Unendliche.

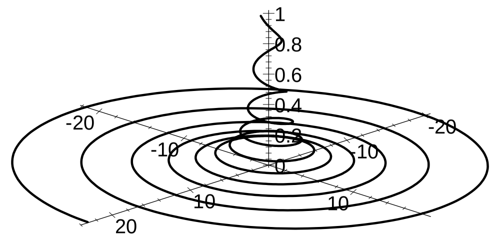

Abb. 32: Spirale, die sich der (x, y)-Ebenen nähert

Falls der dritte Eigenwert positiv ist, geht in Richtung seines Eigenvektors alles ins Unendliche; je nach Vorzeichen von a entfernen sich die Lösungskurven dabei spiralförmig von der durch diesen Eigenvektor aufgespannten Geraden oder aber gehen auf sie zu. Abbildung 33 zeigt den letzteren Fall mit $\lambda = +1/6$ und a, b wie in Abbildung 30.

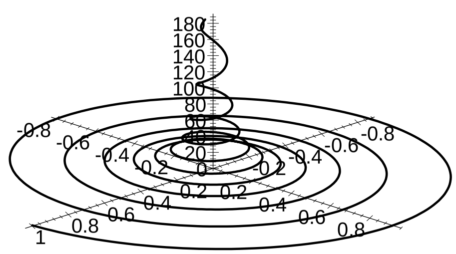

Abb. 33: Spirale, die sich der z-Achse nähert

Man beachte, daß die Abbildungen 32 und 33 zwar auf den ersten Blick sehr ähnlich aussehen, daß aber die Dynamik in Abbildung 32 in z-Richtung nach unten geht, in Abbildung 33 aber nach oben. Der Rotationssinn der Spiralen ist in beiden Fällen der Gegenuhrzeigersinn.

c) Lineare homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine der wichtigsten Anwendungen der Theorie aus den letzten Abschnitten in der Elektrotechnik sind lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dieser Abschnitt soll zeigen, daß man in diesem Spezialfall weder Determinanten noch Eigen- und Hauptvektoren berechnen muß, um die Lösungsfunktionen zu finden.

Um zu sehen, was der allgemeine Ansatz in diesem Spezialfall ergibt, schreiben wir die Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot y(t) + a_0 y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{C}\,.$$

als ein System

$$\begin{aligned} \dot y_0(t) &= y_1(t) \\ \dot y_1(t) &= y_2(t) \\ &\vdots\ \vdots \\ \dot y_{n-2}(t) &= y_{n-1}(t) \\ \dot y_{n-1}(t) &= -a_{n-1}y_{n-1}(t) - \cdots - a_1\dot y_1(t) - a_0 y_0(t) \end{aligned}$$

oder kurz $\dot{\vec y}(t) = A\vec y(t)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

und

$$\vec y(t) = \begin{pmatrix} y_0(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen $\vec y(t)$ dieses Systems definieren Lösungen $y(t) = y_0(t)$ der obigen Gleichung, und umgekehrt ist auch für jede solche Lösung $y(t)$

der Vektor

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

eine Lösung des Systems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$.

Aus dem vorigen Abschnitt wissen wir, daß die Lösungen dieses Systems einen n-dimensionalen Vektorraum V von vektorwertigen Funktionen $t \mapsto \vec{y}(t)$ bilden. Jede einzelne Komponente jeder Lösung aus diesem Vektorraum ist darstellbar als Linearkombination von Funktionen $t^j e^{\lambda_i t}$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte von A sind und die nichtnegative ganze Zahl j kleiner ist als die größte Stufe eines Hauptvektors zu λ_i, erst recht also kleiner als die algebraische Vielfachheit von λ_i. Insbesondere stehen daher bei einfachen Eigenwerten oder allgemeiner bei Eigenwerten, deren geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen ist, überhaupt keine echten t-Potenzen vor den Exponentialfunktionen.

Außerdem wissen wir, daß jedes Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist: Bei Anfangsbedingungen

$$y_0(t_0) = c_0, \quad \ldots, \quad y_{n-1}(t_0) = c_{n-1}$$

ist $\vec{y}(t) = e^{A(t-t_0)}$ *die* Lösung. Vornehm ausgedrückt können wir auch sagen, daß für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$V \to \mathbb{C}^n; \quad \vec{y}(t) \mapsto \vec{y}(t_0)$$

ein Isomorphismus ist.

Für jeden Lösungsvektor $\vec{y}(t)$ des Differentialgleichungssystems ist die nullte Komponenten $y_0(t)$ Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = 0\,,$$

und diese Komponente bestimmt auch die anderen Komponenten $y_i(t)$, die ja gerade die Ableitungen von $y_0(t)$ sind. Daher bilden auch die

Lösungsfunktionen dieser Gleichung einen n-dimensionalen Vektorraum, d.h. auch die Abbildung $\vec{y}(t) \mapsto y_0(t)$ ist ein Isomorphismus, und wenn wir Anfangsbedingungen mit ins Spiel bringen folgt auch, daß es für jede Vorgabe von Werten $y(t_0), \dot{y}(t_0), \ddot{y}(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0)$ genau eine Lösung gibt.

Wie wir uns gerade überlegt haben, ist $y_0(t)$ Linearkombination von Funktionen der Art $t^j e^{\lambda_i t}$, wobei λ_i die Eigenwerte von A durchläuft und j kleiner als die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_i ist.

Die Summe der algebraischen Vielfachheiten der (komplexen) Eigenwerte einer komplexen $n \times n$-Matrix ist gleich dem Grad des charakteristischen Polynoms, also gleich n; damit gibt es genau n solche Funktionen. Andererseits wissen wir, daß der Lösungsraum die Dimension n hat; somit werden alle diese Funktionen wirklich gebraucht und sie bilden eine Basis des Lösungsraums.

Für eine wirklich befriedigende Kenntniss des Lösungsraums fehlt uns nun nur noch ein Verfahren, wie wir die Eigenwerte λ_i und deren algebraische Vielfachheiten α_i direkt aus den Koeffizienten der Gleichung berechnen können.

Zumindest die Eigenwerte λ_i lassen sich leicht aus der Gleichung ablesen: Für die Funktion $y(t) = e^{\lambda t}$ ist $y^{(i)}(t) = \lambda^i e^{\lambda t}$, sie ist also genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn

$$\begin{aligned} &\lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \cdots + a_1\lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} \\ &= (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t} \end{aligned}$$

verschwindet; da $e^{\lambda t}$ nirgends verschwindet, ist dies genau dann der Fall, wenn gilt

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0\,. \qquad (*)$$

Definition: Die Gleichung $(*)$ heißt *charakteristische Gleichung* der Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = 0\,.$$

Die Eigenwerte λ_i von A sind also genau die Nullstellen der charakteristischen Gleichung der Differentialgleichung. Da diese denselben Grad hat wie das charakteristische Polynom von A liegt die Vermutung nahe, daß sie (eventuell bis auf eine Konstante) damit übereinstimmt, und das ist auch tatsächlich der Fall:

Lemma: Die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung ist das mit $(-1)^n$ multiplizierte charakteristische Polynom von A.

Beweis: Für $n = 1$ ist die Differentialgleichung $\dot y(t) = ay(t)$ identisch mit dem zugehörigen System; die charakteristische Gleichung ist $\lambda - a$, und die „Matrix" $A = (a)$ hat das charakteristische Polynom $a - \lambda$. Für $n = 1$ stimmt die Behauptung also.

Für $n > 1$ entwickeln wir das charakteristische Polynom

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1}-\lambda \end{vmatrix}$$

nach der ersten Spalte und erhalten

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{n-1}(-a_0) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \end{vmatrix} .$$

Die erste Determinate auf der rechten Seite ist von derselben Form wie das betrachtete charakteristische Polynom, hat aber nur die Größe

$(n-1)\times(n-1)$. Wir können daher induktiv schließen, daß sie gleich

$$(-1)^{n-1}\big(a_n\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda + a_1\big)$$

ist. Die zweite Determinante läßt sich direkt ausrechnen: Wie man sich leicht überlegt (oder in **[HM1]**, Kapitel I, §4*f)* nachliest), ist die Determinante einer Dreiecksmatrix gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente; die zweite Determinante ist also gleich eins. Damit folgt

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda E) &= (-\lambda)(-1)^{n-1}\big(a_n\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda + a_1\big) \\ &\quad + (-1)^{n-1}(-a_0) \\ &= (-1)^n\big(a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\big) ,\end{aligned}$$

wie behauptet. ■

Insbesondere haben also die charakteristische Gleichung einer Differentialgleichung und das charakteristische Polynom der zugehörigen Matrix nicht nur dieselben Nullstellen, sondern auch die Vielfachheiten dieser Nullstellen sind gleich; die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte lassen sich direkt aus der charakteristischen Gleichung ablesen.

Damit haben alle Bausteile zusammen und können das Ergebnis dieses Abschnitts im folgenden Satz zusammenfassen:

Satz: Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

der Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot y(t) + a_0 y(t) = 0$$

habe die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$; die Vielfachheit der Nullstelle λ_i sei α_i. Dann bilden die Lösungen der Differentialgleichung einen n-dimensionalen Vektorraum V mit Basis

$$\big\{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{\alpha_1-1}e^{\lambda_1 t}, \quad \dots \quad e^{\lambda_r t}, te^{\lambda_r t}, \dots, t^{\alpha_r-1}e^{\lambda_r t}\big\} .$$

Für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ ist die lineare Abbildung

$$V \to \mathbb{C}^n; \quad y \mapsto \big(y(t_0), \dot y(t_0), \ddot y(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)\big)$$

ein Isomorphismus; insbesondere ist jedes Anfangswertproblem

$$y(t_0) = c_0, \quad \dot y(t_0) = c_1, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$$

eindeutig lösbar. ■

Sofern wir uns für komplexwertige Lösungen interessieren, liefert uns dieser Satz alles was wir brauchen. Bei vielen Anwendungen hat man es aber mit Gleichungen mit reellen Koeffizienten zu tun, und von der Natur des Problems her interessieren nur reelle Lösungen. Mit unserem bisherigen Ansatz kommen wir auch bei diesen Problemen nicht um komplexe Lösungen herum; beispielsweise hat die wohlbekannte Differentialgleichung

$$\ddot y(t) + y(t) = 0$$

die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

mit den beiden rein imaginären Lösungen $\lambda = \pm i$, die oben angegebene Basis des Lösungsraums ist also

$$\{e^{it},\ e^{-it}\}\,.$$

Falls wir noch nie etwas vom obigen Satz gehört hätten, würden wir stattdessen sagen, daß die Lösungen dieser Differentialgleichung genau die Linearkombinationen von Sinus und Cosinus sind, Basis des Lösungsraums ist also

$$\{\sin t,\ \cos t\}\,.$$

Über $\mathbb{C}$ sind beide Aussagen äquivalent, denn auf Grund der EULERschen Formeln

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) \quad \text{und} \quad \sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$$

bzw.

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \quad \text{und} \quad e^{-it} = \cos t - i \sin t$$

erzeugen beide Basen denselben $\mathbb{C}$-Vektorraum. Wenn wir an reellen Lösungen interessiert sind, ist aber die zweite Basis erheblich nützlicher, denn sie erzeugt auch den $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Lösungen.

Entsprechend hätten wie auch für allgemeinere Differentialgleichungen mit reellen Koeffizienten gerne eine $\mathbb{C}$-Basis des (komplexen) Lösungsraums, die gleichzeitig $\mathbb{R}$-Basis des reellen Lösungsraums ist. Im Rest dieses Abschnitts wollen wir uns überlegen, wie wir diese Basis konstruieren können.

Wir gehen also aus von einer Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot y(t) + a_0 y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

und betrachten zunächst wieder die charakteristische Gleichung

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0\,.$$

Diese *kann* reelle Lösungen haben; diese bezeichnen wir mit λ_1 bis λ_p, und falls es keine gibt, setzen wir $p = 0$.

Falls p gleich der Gesamtzahl r der Nullstellen der charakteristischen Gleichung ist, sind wir fertig: Die Funktionen $t^j e^{\lambda_i t}$ sind allesamt reell, und die, bei denen j kleiner als die Vielfachheit der Nullstelle λ_i ist, spannen sowohl den komplexen als auch den reellen Lösungsraum auf.

Andernfalls gibt es auch noch nichtreelle Nullstellen. Für jede solche Nullstelle λ ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle, denn da die Koeffizienten a_i reell sind, ist $\overline{a_i} = a_i$ und damit

$$\overline{\lambda}^n + a_{n-1}\overline{\lambda}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{\lambda} + a_0 = \overline{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0} = 0\,.$$

Nichtreelle Nullstellen treten also immer auf als Paare konjugiert komplexer Zahlen; außerdem haben λ und $\overline{\lambda}$ dieselbe Vielfachheit, denn eine Nullstelle ist genau dann eine r-fache Nullstelle eines Polynoms P, wenn sie Nullstelle von P und allen seinen Ableitungen bis zur $(r-1)$-ten ist. Da auch alle diese Ableitungen Polynome mit reellen Koeffizienten sind, zeigt die gleiche Rechnung wie oben, daß $P^{(j)}(\lambda)$ genau dann verschwindet, wenn auch $P^{(j)}(\overline{\lambda})$ verschwindet.

Wir fassen daher die nichtreellen Nullstellen zu Paaren $\left(\lambda_{p+j}, \overline{\lambda_{p+j}}\right)$ zusammen, wobei j von 1 bis zur Anzahl q dieser Paare läuft; die Gesamtzahl der Nullstellen ist also $r = p + 2q$.

Die Vielfachheit der Nullstelle λ_k sei weiterhin mit α_k bezeichnet; für $k > p$ ist das gleichzeitig auch die Vielfachheit der Nullstelle $\overline{\lambda}_k$.

Für $k > p$ wenden wir, genau wie im obigen Beispiel, die EULERschen Formeln an: Für

$$\lambda_k = \mu_k + i\nu_k \quad \text{mit} \quad \mu_k, \nu_k \in \mathbb{R}$$

ist

$$e^{\lambda_k t} = e^{\mu_k t}\big(\cos\nu_k t + i\sin\nu_k t\big) \quad \text{und} \quad e^{\overline{\lambda_k} t} = e^{\mu_k t}\big(\cos\nu_k t - i\sin\nu_k t\big)\,,$$

genauso ist für jedes j

$$t^j e^{\lambda_k t} = t^j e^{\mu_k t}\big(\cos\nu_k t + i\sin\nu_k t\big)$$

und

$$t^j e^{\overline{\lambda_k} t} = t^j e^{\mu_k t}\big(\cos\nu_k t - i\sin\nu_k t\big)\,.$$

Also spannt

$$\big\{t^j e^{\lambda_k t},\ t^j e^{\overline{\lambda_k} t}\big\}$$

denselben $\mathbb{C}$-Vektorraum auf wie

$$\big\{t^j e^{\mu_k t}\cos\nu_k t,\ t^j e^{\mu_k t}\sin\nu_k t\big\}\,,$$

und letztere Basis spannt gleichzeitig den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reeller Funktionen aus diesem $\mathbb{C}$-Vektorraum auf.

Damit können wir auch eine Basis des reellen Lösungsraums angeben:

Satz: Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

der Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0$$

habe die reellen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sowie die Paare konjugiert komplexer Nullstellen $\big(\lambda_{p+1}, \overline{\lambda_{p+1}}\big), \ldots, \big(\lambda_{p+q}, \overline{\lambda_{p+q}}\big)$ mit $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$; die Vielfachheit der Nullstelle λ_i sei α_i. Dann bilden die Lösungen der Differentialgleichung einen n-dimensionalen Vektorraum V, der aufgespannt wird von den Funktionen

$$t^j e^{\lambda_i t} \quad \text{für } i = 1, \ldots, p$$

und

$$t^j e^{\mu_i t}\cos\nu_i t, \quad t^j e^{\mu_i t}\sin\nu_i t \quad \text{für } i = p+1, \ldots, p+q\,,$$

wobei j jeweils von null bis $\alpha_i - 1$ läuft. Für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ ist die lineare Abbildung

$$V \to \mathbb{R}^n; \quad y \mapsto \big(y(t_0), \dot{y}(t_0), \ddot{y}(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0)\big)$$

ein Isomorphismus; insbesondere ist jedes Anfangswertproblem

$$y(t_0) = c_0, \quad \dot{y}(t_0) = c_1, \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(t_0)$$

eindeutig lösbar. ■

d) Inhomogene Differentialgleichungen

Am Beispiel der Schwingungsdifferentialgleichungen haben wir gesehen, daß zur Beschreibung interessanter Phänomene homogene Differentialgleichungen oft nicht ausreichen; sobald etwa ein elektrischer Schwingkreis eine Stromquelle enthält, haben wir eine inhomogene Differentialgleichungen.

Wie schon im Falle der Schwingungsdifferentialgleichungen genügt es zur Lösung einer allgemeinen inhomogenen linearen Differentialgleichung, den Lösungsraum der zugehörigen homogenen Differentialgleichung zu kennen und dazu noch *eine* Lösung der inhomogenen, denn wegen der Linearität der linken Seite ist die Differenz zweier Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung Lösung der homogenen.

Wir kennen bereits eine Methode, uns eine solche spezielle Lösung zu verschaffen: Sobald wir uns Anfangswerte vorgeben, können wir die entsprechende Lösung des inhomogenen Problems mittels LAPLACE-Transformation finden – sofern wir die LAPLACE-Transformierte des inhomogenen Anteils kennen und aus der LAPLACE-Transformierten der Lösungsfunktion diese Funktion selbst bestimmen können. In vielen praktisch relevanten Fällen wird dies mit Hilfe von Tabellen möglich sein, sofern man nur die grundlegenden Regeln für den Umgang mit LAPLACE-Transformationen kennt.

Eine zweite Methode ist das *Erraten* einer Lösung. In der Praxis betrachtet man Differentialgleichungen meist, um das künftige Verhalten eines

Systems vorauszusagen, und oft wird man (leider nicht immer richtige!) ungefähre Erwartungen haben, wie dieses Verhalten aussehen sollte. Falls man diese als Ansatz mit unbestimmten Parametern in die Differentialgleichung einsetzt und die Erwartungen richtig war, kann man die Parameter bestimmen und hat eine Lösung gefunden; andernfalls muß man sich etwas neues überlegen.

Als Beispiel betrachten wir nochmals die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = f(t)\,.$$

Wir kamen auf diese Differentialgleichung bei der Betrachtung eines elektrischen Schwingkreises, an den eine externe Spannung proportional $f(t)$ angelegt war, und für vernünftiges $f(t)$ sollte man erwarten, daß es Lösungen gibt, bei denen sich $y(t)$ völlig von $f(t)$ bestimmen läßt und daher von ähnlicher Gestalt ist.

Im Falle einer Gleichstromquelle $f(t) = c$ vermuten wir, daß es vielleicht eine Lösung gibt, bei der nur ein Gleichstrom fließt. Der Ansatz $y(t) = a$ führt auf

$$\sigma a = c \quad \text{oder} \quad a = \frac{c}{\sigma}\,,$$

falls $\sigma \neq 0$ ist.

Für $\sigma = 0$ haben wir *de facto* eine Differentialgleichung für $\dot{y}(t)$ statt für $y(t)$; man könnte es daher mit einem Ansatz der Form $\dot{y}(t) = b$ oder $y(t) = bt + a$ versuchen. Für $\rho \neq 0$ führt das zu

$$\rho b = c \quad \text{oder} \quad b = \frac{c}{\rho}\,;$$

a ist hier natürlich beliebig.

Entsprechend können wir auch bei einer angelegten Wechselspannung vorgehen: Der Schwingkreis wird sicherlich die Amplitude und die Phase verändern, aber die permanent angelegte Wechselspannung sollte doch dem Schwingkreis ihre Frequenz aufzwingen, so daß es zumindest eine Lösung geben sollte, die eine reine Schwingung mit dieser Frequenz ist. Für

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = A\cos\omega_0 t$$

versuchen wir es also mit

$$y(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t$$

und berechnen die Ableitungen:

$$\dot{y}(t) = -a\omega_0\sin\omega_0 t + b\omega_0\cos\omega_0 t$$

und

$$\ddot{y}(t) = -a\omega_0^2\cos\omega_0 t - b\omega_0^2\sin\omega_0 t\,.$$

Einsetzen in die linke Seite der Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}&\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t)\\ &= (-a\omega_0^2 + \rho b\omega_0 + \sigma a)\cos\omega_0 t + (-b\omega_0^2 - \rho a\omega_0 + \sigma b)\sin\omega_0 t\,,\end{aligned}$$

und das ist gleich $A\cos\omega_0 t$, falls

$$(\sigma - \omega_0^2)a + \rho\omega_0 b = A \quad \text{und} \quad (\sigma - \omega_0^2)b - \rho\omega_0 a = 0$$

ist.

Für $\sigma = \omega_0^2$ ist dies problemlos zu lösen: Dann ist einfach

$$a = 0 \quad \text{und} \quad b = \frac{A}{\rho\omega_0}\,.$$

Für $\sigma \neq \omega_0^2$ können wir die zweite Gleichung durch $(\sigma - \omega_0^2)$ dividieren und erhalten

$$b = \frac{\rho\omega_0}{\sigma - \omega_0^2}a\,.$$

Dies können wir in die erste Gleichung einsetzen:

$$(\sigma - \omega_0^2)a + \rho\omega_0\frac{\rho\omega_0}{\sigma - \omega_0^2}a = \frac{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2}{\sigma - \omega_0^2}a = A$$

oder

$$a = \frac{A(\sigma - \omega_0^2)}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2} \quad \text{und} \quad b = \frac{A\rho\omega_0}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2}\,.$$

In beiden Fällen gibt es also in der Tat eine Lösung der postulierten Form, die wir hiermit explizit bestimmt haben.

Im Prinzip haben wir diese Lösung bereits in §1*c)* berechnet, mit dem Ansatz hier ist die Situation nun aber sehr viel übersichtlicher: Im häufigsten Falle, in dem die homogene Gleichung eine gedämpfte Schwingung beschreibt etwa wissen wir nun, daß es eine feste reine Schwingung mit der erregenden Frequenz gibt, gegen die *alle* Lösungen der Differentialgleichung langfristig konvergieren.

Für allgemeinen Aussagen ist also dieser Ansatz besser geeignet; falls wir dagegen ein konkretes Anfangswertproblem lösen wollen, liefert die LAPLACE-Transformation direkt die Lösung, während wir beim Weg über die allgemeine Lösung noch ein lineares Gleichungssystem lösen müssen, um die freien Parameter der allgemeinen Lösung an vorgegebene Anfangswerte anzupassen. (Falls man freilich die inversen LAPLACE-Transformationen über Partialbruchzerlegung wirklich konkret berechnet, wird man oft auf genau dasselbe lineare Gleichungssystem stoßen, das man zur Anpassung der allgemeinen Lösung an konkrete Anfangsbedingungen lösen muß.)

Falls man einigermaßen konkrete Erwartungen über das Verhalten zumindest einer Lösungsfunktion hat, ist das Erraten einer speziellen Lösung also oft erfolgversprechend. Das in §1*c)* behandelte Beispiel der Resonanzkatastrophe zeigt aber, daß es auch Fälle gibt, wo man nur mit ziemlicher Erfahrung eine spezielle Lösung erraten kann: Die Gleichung

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \cos \omega_0 t$$

hat schließlich *keine* Lösung, die eine reine Schwingung der Frequenz ω_0 ist.

Zum Glück gibt es außer LAPLACE-Transformation und Erraten noch ein drittes, rein formales Verfahren, das ebenfalls häufig zum Ziel führt, die bereits von den linearen Differentialgleichung erster Ordnung her bekannte *Variation der Konstanten.* Diese hatten wir dort als völlig unmotivierten Ansatz verwendet, der erstaunlicherweise zu einer Lösung führte. Im nächsten Abschnitt werden wir uns überlegen, daß auch diese Methode in ganz natürlicher Weise aus der genaueren Untersuchung von Differentialgleichungen auftritt und ihr Erfolg (oder Mißerfolg) in konkreten Beispielen damit verstanden werden kann.

e) Symmetriebetrachtungen

Viele Systeme haben eine natürliche oder konstruktionsbedingte Symmetrie; wenn man diese Symmetrie erkennt, hat man gleich zwei Werkzeuge in der Hand:

Einmal hat man eine Struktur des Lösungsraums erkannt und kann via Symmetrie eventuell aus einfachen, leicht erkennbaren Lösungen kompliziertere konstruieren. Dieser Aspekt spielt bei den linearen Differentialgleichungen, die wir hier betrachten, keine nennenswerte Rolle: Hier hat der Lösungsraum schließlich immer eine einfache Struktur als affiner Raum oder (im homogenen Fall) sogar Vektorraum – was andererseits natürlich gerade ein sehr einfacher Fall des gerade Gesagten ist.

Zum anderen kann man eventuell versuchen, die Symmetrie der Differentialgleichung durch Koordinatentransformationen auf eine *bekannte* Symmetrie zurückzuführen, die zu einem bekannten Typus von Differentialgleichungen gehört, von denen man weiß, wie sie gelöst werden können.

In diesem Abschnitt soll diese sehr vage Bemerkung anhand einiger konkreter Beispiele erläutert werden.

Die unproblematischste aller Differentialgleichungen ist

$$\dot{y}(t) = f(t)\,;$$

einfache Integration führt auf die Lösung

$$y(t) = \int f(t)\,dt + C\,. \qquad (*)$$

(Tatsächlich kann diese Integration alles andere als „einfach“ sein, aber wenn es um Lösungsformeln für Differentialgleichungen geht, wollen wir ein Problem auch dann als „gelöst“ betrachten, wenn die Formel noch Integrale enthält; das Auffinden von Stammfunktionen ist ein getrenntes Problem und hat seine eigenen Methoden.)

Wenn wir $(*)$ unter Symmetriegesichtspunkten betrachten, sehen wir, daß mit jeder Lösung $y(t)$ auch $y(t) + C$ eine Lösung ist.

Falls umgekehrt eine Differentialgleichung die Eigenschaft hat, daß mit $y(t)$ auch $y(t) + C$ für jede Konstante C eine Lösung ist, haben alle

Lösungen dieselbe Ableitung, die Differentialgleichung läßt sich also auf die Form

$$\dot y(t) = f(t)$$

bringen. Somit sind die Differentialgleichungen, die durch eine einfache Integration gelöst werden können, dadurch charakterisiert, daß mit jeder Lösungsfunktion $y(t)$ und jede Konstante C auch $y(t) + C$ eine Lösung ist.

Dies können wir dadurch ausnutzen, daß wir eine gegebene Differentialgleichung, in der wir eine Symmetrie erkennen können, so umformen, daß diese Symmetrie transformiert wird in die Addition einer Konstanten.

Ein Beispiel dafür kennen wir bereits, auch wenn wir damals anders vorgegangen sind: Die lineare homogene Differentialgleichung

$$\dot y(t) = f(t)y(t)$$

hat mit $y(t)$ auch jedes Vielfache $Cy(t)$ als Lösung. Die Modifikation, die aus Multiplikationen Additionen macht, ist der Logarithmus; wir müssen also schauen, welcher Differentialgleichung die Funktion

$$z(t) = \ln y(t)$$

genügt. Nach der Kettenregel ist

$$\dot z(t) = \frac{\dot y(t)}{y(t)}\,;$$

somit folgt aus der Ausgangsgleichung, daß

$$\dot z(t) = f(t)$$

ist, und das läßt sich in der Tat durch direkte Integration lösen:

$$z(t) = \int f(t)\,dt + C \quad \text{und} \quad y(t) = e^{\int f(t)\,dt}\,.$$

Auch die Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot y(t) = f(t)y(t) + g(t)\,,$$

läßt sich leicht aus Symmetriebetrachtungen herleiten: Ist $y(t)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung und $u(t)$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$\dot u(t) = f(t)u(t)\,,$$

so ist für jede Konstante C auch

$$y(t) + Cu(t)$$

eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

Auch hier gibt es eine offensichtliche Modifikation, die aus $y(t)$ eine Funktion macht, die bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, nämlich

$$z(t) = \frac{y(t)}{u(t)}\,.$$

Für diese Funktion ist

$$\begin{aligned}
\dot z(t) &= \frac{u(t)\dot y(t) - y(t)\dot u(t)}{u(t)^2} = \frac{\dot y(t)}{u(t)} - \frac{y(t)}{u(t)}\frac{\dot u(t)}{u(t)}\\
&= \frac{f(t)y(t) + g(t)}{u(t)} - z(t)f(t) = f(t)z(t) + \frac{g(t)}{u(t)} - z(t)f(t)\\
&= \frac{g(t)}{u(t)}\,.
\end{aligned}$$

Die letztere Funktion kennen wir, sobald wir die homogene Differentialgleichung gelöst haben: Wegen

$$u(t) = e^{\int f(t)\,dt} \qquad \text{ist} \qquad \frac{g(t)}{u(t)} = e^{-\int f(t)\,dt}\,,$$

also

$$z(t) = \int ig(t)e^{-\int^t f(\tau)\,d\tau}\,dt$$

und

$$y(t) = u(t)z(t) = e^{\int f(t)\,dt}\int g(t)e^{-\int^t f(\tau)\,d\tau}\,dt\,.$$

Diese Methode der Variation der Konstanten kann gelegentlich auch dann mit Erfolg angewandt werden, wenn man die ihrer Ableitung zugrundeliegende Symmetrie nicht direkt sieht: Ohne eine solche Symmetrie verliert die Methode zwar ihre Erfolgsgarantie, aber als Ansatz der *vielleicht* zum Erfolg führen kann, taugt sie allemal, und die Auflösung von Differentialgleichungen ist nunmal oft mehr Kunst als Wissenschaft.

Betrachten wir als Beispiel die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) - y(t) = 6 \sinh t\,.$$

Erraten einer speziellen Lösung nach dem Motto, daß diese so ähnlich aussehen sollte wie die rechte Seite, legt hier einen Ansatz der Form

$$y(t) = a \cosh t + b \sinh t\,,$$

nahe, aber der führt offensichtlich nicht zum Erfolg: Für jede solche Funktion die linke Seite identisch null ist.

Probieren wir es also mit Variation der Konstanten: Der obige Ansatz ist gleichzeitig die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (und konnte genau deshalb auch unmöglich zu einer Lösung der inhomogenen Gleichung führen); Variation der Konstanten macht daraus den Ansatz

$$y(t) = a(t) \cosh t + b(t) \sinh t\,.$$

Differenzieren führt auf

$$\dot{y}(t) = \dot{a}(t) \cosh t + a(t) \sinh t + \dot{b}(t) \sinh t + b(t) \cosh t$$

und

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) = {} & \ddot{a}(t) \cosh t + 2\dot{a}(t) \sinh t + a(t) \cosh t \\ & + \ddot{b}(t) \sinh t + 2\dot{b}(t) \cosh t + b(t) \sinh t\,; \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\big(\ddot{a}(t) + 2\dot{b}(t)\big) \cosh t + \big(\ddot{b}(t) + 2\dot{a}(t)\big) \sinh t = 6 \sinh t\,.$$

Das sieht nicht gerade sehr vielversprechend aus: Diese Differentialgleichung ist eher komplizierter als die ursprüngliche.

Zum Glück brauchen wir aber nicht die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung, sondern nur *irgendeine* Lösung. Daher können wir versuchsweise umformen auf neue Gleichungen, die zwar nicht äquivalent sind zur obigen, deren Lösungen – so wir welche finden können – aber zu Lösungen dieser Differentialgleichung führen.

Ein offensichtlicher Kandidat für einen Ansatz ist das System

$$\ddot{a}(t) + 2\dot{b}(t) = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{b}(t) + 2\dot{a}(t) = 6\,.$$

Dieses System können wir auffassen als lineares Differentialgleichungssystem für die Ableitungen $\dot{a}(t)$ und $\dot{b}(t)$ und somit nach den allgemeinen Methoden, die wir bereits entwickelt haben, lösen.

Da wir nur eine Lösung suchen, können wir uns diese Mühe allerdings sparen, indem wir heutistisch vorgehen und versuchen, eine spezielle einfache Lösung zu erraten.

Die einfachste Lösung der ersten Gleichung

$$\ddot{a}(t) + 2\dot{b}(t) = 0$$

ist natürlich $a(t) = b(t) = 0$, aber damit können wir nicht die zweite Gleichung lösen. Tatsächlich genügt es aber für eine Lösung der ersten Gleichung bereits, daß

$$\ddot{a}(t) = \dot{b}(t) = 0$$

ist, und wenn wir dies in die zweite Gleichung

$$\ddot{b}(t) + 2\dot{a}(t) = 6$$

einsetzen, folgt, daß $\dot{a}(t) = 3$ sein muß.

Eine Lösung davon ist $a(t) = 3t$ und $b(t) = 0$; damit erhalten wir die spezielle Lösung

$$y(t) = 3t \cosh t\,.$$

Die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung ist daher

$$y(t) = 3t \cosh t + a \cosh t + b \sinh t$$

mit zwei beliebigen Konstanten a und b.

Dieser Lösungsweg sieht sehr nach Trickserei und Glück aus; wenn wir die Gleichung aber umschreiben in ein nichthomogenes lineares Differentialgleichungssystem, können wir die Variation der Konstanten wieder durch Symmetriebetrachtungen rechtfertigen und erhalten ein Verfahren, das (wenn wir Stammfunktionen finden können) stets zu einer Lösung führt.

Wir betrachten dazu gleich das allgemeine System

$$\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$$

mit einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und einem Vektor $\vec{b}(t)$ von Funktionen $b_i(t)$.

Bei der Suche nach Symmetrien dieses Systems können wir genauso vorgehen wie im eindimensionalen Fall: Ist $\vec{u}(t)$ eine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{\vec{u}}(t) = A\vec{u}(t)$$

und $\vec{y}(t)$ eine Lösung des inhomogenen Systems, so ist mit

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$

auch

$$\begin{pmatrix} y_1(t) + C_1 u_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) + C_n u_n(t) \end{pmatrix}$$

für beliebige Konstanten $C_1, \ldots, C_n$ eine Lösung.

Beim System $\dot{\vec{y}}(t) = \vec{g}(t)$ ist mit $\vec{y}(t)$ auch $\vec{y}(t)+\vec{C}$ für jeden Vektor $\vec{C}$ von Konstanten eine Lösung und umgekehrt kann jedes System mit dieser Eigenschaft auf die Form $\dot{\vec{y}}(t) = \vec{g}(t)$ gebracht werden. Auch läßt sich, wie im Eindimensionalen, die Lösung auf Integrationen zurückführen: Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{y}(t) = \int \vec{g}(t)\,dt + \vec{C}\,,$$

wobei das Integral über die vektorwertige Funktion $\vec{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ einfach als Abkürzung dafür steht, daß wir jede der Komponenten g_i von $\vec{g}$ einzeln integrieren und die n Ergebnisse wieder zu einem Vektor zusammenfassen.

Für unser ursprüngliches Problem, die Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems $\vec{y}(t) = A\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$ bedeutet dies, daß wir den Vektor

$$\vec{z}(t) \quad \text{mit} \quad z_i(t) = \frac{y_i(t)}{u_i(t)}$$

betrachten sollten, denn der ist wohlbestimmt bis auf die Addition eines konstanten Vektors.

Die Lösungsmenge des homogenen Systems $\dot{\vec{u}}(t) = A\vec{u}(t)$ besteht aus den Funktionen $e^{At}\vec{C}$ mit einem beliebigen Vektor $\vec{C} \in \mathbb{C}^n$; der Lösungsvektor $\vec{y}(t)$ des inhomogenen Systems entsteht daraus durch komponentenweise Multiplikation mit dem noch zu bestimmenden Vektor $\vec{z}(t)$, von dem wir aber immerhin schon wissen, daß er direkt durch Integration einer vektorwertigen Funktion bestimmt werden kann.

Komponentenweise Multiplikation ist keine übliche Vektoroperation; wenn wir mit Vektoren und Matrizen arbeiten wollen, sollten wir sie also möglichst schnell eliminieren.

Für eine Matrix M und zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zeigt die Multiplikationsformel sofort, daß $M\vec{v}$ komponentenweise multipliziert mit $\vec{w}$ das Gleiche ist wie M multipliziert mit dem komponentenweisen Produkt der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$. In unserem Fall interessiert das komponentenweise Produkt $\vec{y}(t)$ von $\vec{u}(t) = e^{At}\vec{C}$ mit $\vec{z}(t)$, wobei die Wahl des Konstantenvektors $\vec{C}$ uns überlassen bleibt.

Speziell für den Vektor $\vec{C}$, dessen Komponenten allesamt Einsen sind, ist das komponentenweise Produkt von $\vec{C}$ mit einem beliebigen Vektor $\vec{v}$ gleich $\vec{v}$, also ist für diese Wahl von $\vec{C}$

$$\vec{y}(t) = e^{At}\vec{z}(t)\,.$$

Damit können wir auch hier die Gleichung durch Variation der Konstanten lösen: Wir ersetzen einfach den konstanten Vektor $\vec{C}$ durch eine vektorwertige Funktion $\vec{z}(t)$ und müssen nun diese durch Integration bestimmen.

Da die LEIBNIZsche Produktregel auch für matrixwertige Funktionen gilt, ist

$$\dot{\vec{y}}(t) = Ae^{At}\vec{z}(t) + e^{At}\dot{\vec{z}}(t) = A\vec{y}(t) + e^{At}\dot{\vec{z}}(t)\,;$$

$\vec{y}(t)$ erfüllt also genau dann die Differentialgleichung

$$\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t) + \vec{b}(t)\,,$$

wenn
$$\vec{b}(t) = e^{At}\dot{\vec{z}}(t) \quad \text{oder} \quad \dot{\vec{z}}(t) = e^{-At}\vec{b}(t)$$
ist. Damit können wir die Komponenten von $\vec{z}(t)$ als Stammfunktionen der Komponenten des ganz rechts stehenden Vektors von Funktionen berechnen.

Zur Vereinfachung der Schreibweise vereinbaren wir, daß für eine vektorwertige Funktion $\vec{v}(t)$ gelten soll
$$\int \vec{v}(t)\,dt = \begin{pmatrix} \int v_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int v_n(t)\,dt \end{pmatrix} \quad \text{falls} \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix};$$
dann ist
$$\vec{z}(t) = \int e^{-At}\vec{b}(t)\,dt\,,$$
und wir haben eine spezielle Lösung gefunden. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist daher
$$\vec{y}(t) = e^{At}\left(\int e^{-At}\vec{b}(t)\,dt\right) + e^{At}\vec{y}_0$$
mit einem beliebigen konstanten Vektor $\vec{y}_0$.

Zur Anwendung dieser Formel auf das obige Beispiel müssen wir die Differentialgleichung
$$\ddot{y}(t) - y(t) = 6\sinh t$$
umschreiben in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung, also in
$$\dot{y}(t) = z(t)$$
$$\dot{z}(t) = y(t) + 6\sinh t\,.$$
Hier ist
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6\sinh t \end{pmatrix};$$
wir müssen zunächst die Matrix e^{At} berechnen.

Wie wir bereits zu Beginn von §1*e)* gesehen haben, ist A^2 die Einheitsmatrix, woraus folgt, daß
$$e^A = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e^{At} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$
ist, also
$$e^{-At} = \begin{pmatrix} \cosh(-t) & \sinh(-t) \\ \sinh(-t) & \cosh(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$
Wir brauchen die Funktion
$$e^{-At}\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 6\sinh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\sinh^2 t \\ 6\sinh t\cosh t \end{pmatrix}$$
und müssen diese integrieren.

Beginnen wir mit dem ersten Eintrag:
$$\begin{aligned}\int -6\sinh^2 t\,dt &= -6\int\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 dt = -\frac{3}{2}\int(e^{2t} + e^{-2t} - 2)\,dt \\ &= -\frac{3}{2}\left(\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} - 2t\right) + C \\ &= -\frac{3}{4}(e^t - e^{-t})(e^t + e^{-t}) + 3t + C' \\ &= -3\sinh t\cosh t + 3t + C'\,.\end{aligned}$$
Genauso finden wir auch eine Stammfunktion des zweiten Eintrags:
$$\begin{aligned}\int 6\sinh t\cosh t\,dt &= \frac{3}{2}\int(e^{2t} - e^{-2t})\,dt \\ &= \frac{3}{4}\left(e^{2t} + e^{-2t}\right) + C \\ &= \frac{3}{4}\left(e^{2t} + 2 + e^{-2t}\right) + C - \frac{3}{2} \\ &= 3\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 + C' = 3\cosh^2 t + C'\,.\end{aligned}$$

Da wir nur eine spezielle Lösung brauchen, können wir die beiden Integrationskonstanten unbesorgt auf null setzen; jede andere Wahl würde nur bedeuten, daß wir eine Lösung der homogenen Gleichung dazuaddieren. Also arbeiten wir mit

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} -3\sinh t\cosh t + 3t \\ 3\cosh^2 t \end{pmatrix}$$

und die gesuchte spezielle Lösung ist

$$\begin{aligned} e^{At}\vec{u}(t) &= \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3\sinh t\cosh t + 3t \\ 3\cosh^2 t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3\sinh t\cosh^2 t + 3t\cosh t + 3\cosh^2 t\sinh t \\ -3\sinh^2 t\cosh t + 3t\cosh t + 3\cosh^3 t \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

In der ersten Zeile dieses Ergebnisses heben sich der erste und der dritte Term gegenseitig weg; in der zweiten ist

$$3\cosh^3 t - 3\sinh^2 t\cosh t = 3\cosh t(\cosh^2 t - \sinh^2 t) = 3\cosh t .$$

Als Endergebnis erhalten wir somit die spezielle Lösung

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{At}\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} 3t\cosh t \\ 3t\sinh t + 3\cosh t \end{pmatrix} .$$

Insbesondere ist

$$y(t) = 3t\cosh t$$

eine spezielle Lösung der Ausgangsgleichung

$$\ddot{y}(t) - y(t) = 6\sinh t ,$$

und die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$y(t) = 3t\cosh t + a\cosh t + b\sinh t$$

mit beliebigen Konstanten a, b aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ – je nachdem, über welchem der beiden Körper wir das Problem betrachten.

Die Beispiele aus diesem Abschnitt zeigen nur einen winzigen Ausschnitt der Möglichkeiten, wie Symmetriebetrachtungen zu Lösungen von Differentialgleichungen führen können; ihre volle Nützlichkeit entfalten sie erst bei nichtlinearen Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen. Im Rahmen dieser Vorlesung bleibt keine Zeit,

näher darauf einzugehen; eine ausführliche Darstellung von Symmetriemethoden findet man etwa bei

G.W. BLUMAN, S. KUMEI: Symmetries and Differential Equations, *Springer*, 1989

Symmetriemethoden zur Lösung von Differentialgleichungen wurden ab etwa 1880 von dem norwegischen Mathematiker SOPHUS LIE (1842–1899) eingeführt. Insbesondere zeigte LIE auch, daß man nicht wirklich die (schwer bestimmbaren) Symmetrien eines Systems bestimmen muß, sondern daß bereits die mit linearer Algebra bestimmbaren sogenannten *infinitesimalen* Symmetrien ausreichen können, um Lösungen zu finden. Mit diesem Ansatz arbeiten auch die heutigen Computeralgebrasysteme; ein einfaches Beispiel dazu wird uns im nächsten Paragraphen bei der Suche nach integrierenden Faktoren begegnen.

Ausgebaut wurde die Methode von EMMY NOETHER (1882–1935), der Tochter des Mannheimer Mathematikers MAX NOETHER (1844-1921). Sie brachte Symmetrien mit den in den Naturwissenschaften allgegenwärtigen Erhaltungssätzen in Verbindung und bereitete damit auch EINSTEINS Relativitätstheorie vor. Bekannter ist sie allerdings als Mitbegründerin der modernen abstrakten Algebra. Nur dank der massiven Intervention HILBERTS durfte sie sich nach langem Kampf 1919 in Göttingen als erste Frau in Mathematik habilitieren. 1933 wurde sie als Jüdin von der Universität Göttingen entlassen und emigrierte nach USA, wo sie am Bryn Mawr College und dem Institute for Advanced Study in Princeton arbeitete.

§4: Nichtlineare Differentialgleichungen

Lineare Differentialgleichungen spielen vor allem deshalb eine so große Rolle in den Anwendungen, weil es dafür (wie wir im letzten Paragraphen gesehen haben) eine gut ausgebaute Lösungstheorie gibt. Oft werden deshalb sogar für ihrem Wesen nach nichtlineare Probleme lineare Approximation betrachtet, um so wenigstens zu einem ungefähren Verständnis der Dynamik des Systems zu gelangen.