b) Sei

$$f(t) = \begin{cases} e^{\dfrac{-1}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \cdot$$

Da diese Funktion außerhalb des Intervalls (a, b) verschwindet und im Innern stetig ist, ist sie natürlich beschränkt. Ihre Ableitungen sind Produkte aus rationalen Funktionen mit f selbst; da $f(t)$ für $t \to a$ oder $t \to b$ erheblich schneller gegen null geht als eine rationale Funktion gegen unendlich gehen kann, haben alle Ableitungen an den Intervallgrenzen den Wert null; die Funktion ist also beliebig oft stetig differenzierbar. Die Beschränktheitsbedingungen sind problemlos: Im kompakten Intervall $[a, b]$ ist jede stetige Funktion beschränkt, und außerhalb sind alle hier betrachteten Funktionen null.

Ein erster Hinweis darauf, daß wir in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nur selten Probleme mit der Existenz von Integralen haben dürften, gibt das folgende

Lemma: *a)* Für eine Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ existieren

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)}\,dt\,.$$

b) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\omega \in \mathbb{R}$ existiert das FOURIER-Integral

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\,;$$

für $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}$ existiert das inverse FOURIER-Integral

$$\check{g}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,.$$

c) Die Abbildung

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ (f, g) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt \end{cases}$$

macht $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ zu einem HERMITEschen Vektorraum.

Beweis: a) Da sowohl $f(t)$ als auch $t^2 f(t)$ beschränkt sind, ist auch $(1 + t^2)f(t)$ beschränkt, es gibt also eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so daß

$$|f(t)| \le \frac{C}{1+t^2} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}\,.$$

Da das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{a,b\to\infty} \int_{-a}^{b} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{a,b\to\infty} \big(\arctan b - \arctan(-a)\big) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

konvergiert, ist es eine konvergente Majorante des Integrals über f, so daß nach dem Majorantenkriterium auch das letztere konvergiert. Damit ist auch *b)* bewiesen, d.h. die Konvergenz aller Integrale $\widehat{f}(\omega)$ und $\check{g}(t)$, denn da $e^{\pm i\omega t}$ den Betrag eins hat, ist auch für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ *bzw.* $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t)| = \left|f(t) \cdot e^{-i\omega t}\right| \le \frac{C}{1+t^2}$$

bzw.

$$|g(\omega)| = \left|g(\omega) \cdot e^{i\omega t}\right| \le \frac{C}{1+\omega^2}\,.$$

Genauso läßt sich auch das Integral über $f(t)\overline{f(t)}$ abschätzen, denn da $|tf(t)|$ beschränkt ist, ist auch $\left|t^2 f(t)\overline{f(t)}\right|$ und damit $(1 + t^2)f(t)\overline{f(t)}$ beschränkt. (Betragsstriche sind hier natürlich überflüssig.)

b) Wie wir gerade gesehen haben, konvergiert das rechtsstehende Integral im Spezialfall $f = g$. Für beliebiges $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und beliebige reelle Zahlen $a \le b$ gilt nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung in der etwas allgemeineren Form aus **[HM1]**, *Kap. 1*, §6*c)*

$$\left|\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt\right| \le \sqrt{\left|\int_a^b f(t)\overline{f(t)}\,dt\right|} \cdot \sqrt{\left|\int_a^b g(t)\overline{g(t)}\,dt\right|}\,,$$

und somit konvergiert mit der rechten Seite auch die linke für $a \to -\infty$ und $b \to \infty$.

Die Eigenschaften eines HERMITEschen Skalarprodukts sind klar bis auf die Eigenschaft, daß nur die Nullfunktion Skalarprodukt null mit sich selbst haben darf, aber da wir es hier mit beliebig oft stetig differenzierbaren und damit insbesondere stetigen Funktionen zu tun haben, folgt dies genauso wie in **[HM1]**, *Kap. 1*, §6*a)* für das Skalarprodukt auf dem Vektorraum aller stetiger Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$. ∎

Da mit einer Funktion f auch alle deren Ableitungen sowie ihre Produkte mit Polynomen stark abfallend sind, gelten im übrigen auch die Formeln aus dem letzten Paragraphen über FOURIER-Transformationen und Ableitungen, ohne daß wir uns über die dort notwendigen, für Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum aber automatisch erfüllten Zusatzvoraussetzungen Gedanken machen müßten.

b) Die Fourier-Transformierte der Gauß-Funktion

Ein wesentliches Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis, daß zumindest auf dem SCHWARTZ-Raum die inverse FOURIER-Transformation wirklich invers zur FOURIER-Transformation ist. Die Strategie ist folgende: Wir zeigen zunächst, daß dies für *eine* spezielle Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt, und folgern daraus in einem zweiten Schritt, daß dies für *alle* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ der Fall ist.

Für die eine spezielle Funktion aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ haben wir nicht viel Auswahl: Wir kennen bislang im wesentlichen nur zwei Beispiele, nämlich $f(t) = e^{-t^2}$ und $f(t) = e^{-1/(t-a)(b-t)}$ auf (a,b) und null sonst. Da das erste Beispiel etwas harmloser aussieht, nehmen wir dieses, und da es den Aufwand kaum vergrößert, später aber nützlich sein wird, verallgemeinern wir es leicht zu

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit} \quad \sigma \in \mathbb{R}\,.$$

Diese Funktion heißt GAUSS-Funktion mit Varianz σ^2; ihr Graph wird auch als *Glockenkurve* bezeichnet. Abbildung 23 zeigt die Kurven für $\sigma = 1/2$ (gepunktet), $\sigma = 1$ (ausgezogen) und $\sigma = 2$ (gestrichelt); wie man sieht, wird die Kurve flacher für größere σ, wohingegen kleine σ zu einem schärfer ausgeprägten Maximum führen. Im Zusammenhang mit der Fehlerrechnung und Statistik werden uns am Ende des Semesters noch genauer mit dieser Funktion beschäftigen.

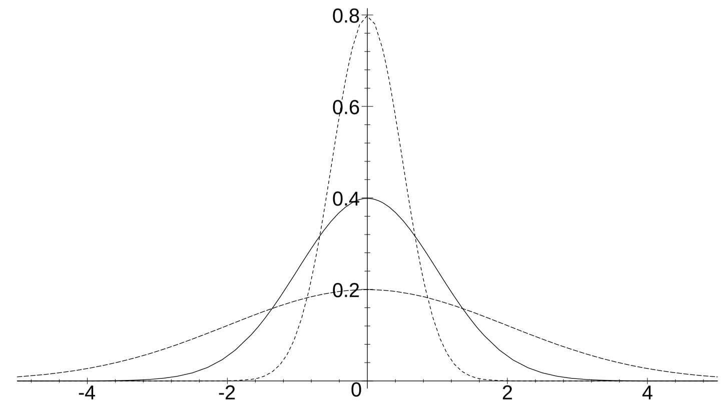

Abb. 23: Gaußkurven für $\sigma = \frac{1}{2}$, 1 und 2

Nach Definition ist

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t}\, dt\,,$$

aber da schon die Stammfunktion von e^{-t^2} nicht elementar ausdrückbar ist, haben wir sicherlich wenig Chancen, dieses Integral über eine Stammfunktion zu berechnen.

Das Lemma aus dem vorigen Abschnitt erlaubt uns aber, Aussagen über die Ableitung von $\widehat{f}(\omega)$ machen:

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = (-i)\cdot \widehat{tf}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t}\, dt\,.$$

Der neue Integrand ist ziemlich ähnlich zur Ableitung des alten, denn

$$\frac{d}{dt}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t} = -\left(\frac{t}{\sigma^2}+i\omega\right)e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left(-\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\right) = (t+i\omega\sigma^2)\,e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,.$$

Die Funktion, die hier abgeleitet wird, geht für $t \to \pm\infty$ gegen null, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t+i\omega\sigma^2)\,e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt = -\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0\,,$$

und damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt = -i\omega\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt\,.$$

Die Ableitung von $\widehat{f}(\omega)$ ist daher

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}\sigma}(-i\omega\sigma^2)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt = -\omega\sigma^2\cdot\widehat{f}(\omega)\,.$$

Somit ist $\widehat{f}(\omega)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dg}{d\omega}(\omega) = -\omega\sigma^2\cdot g(\omega)\,.$$

Diese Differentialgleichung hat offensichtlich die Nullfunktion als eine ihrer Lösungen; falls sie auch eine Lösung $g(\omega)$ hat, die nicht für alle Werte von ω verschwindet, können wir zumindest in der Umgebung solcher Werte durch $g(\omega)$ dividieren und erhalten

$$\frac{g'(\omega)}{g(\omega)} = -\omega\sigma^2\,.$$

Da die Ableitung der Logarithmusfunktion die Funktion $1/x$ ist, zeigt die Kettenregel, daß die linke Seite dieser Gleichung die Ableitung von $\ln g(\omega)$ ist. Durch Integration beider Seiten folgt

$$\ln g(\omega) = -\frac{\omega^2\sigma^2}{2}+C \Longrightarrow g(\omega) = e^C e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\,.$$

Somit ist $\widehat{f}(\omega)$ ein konstantes Vielfaches von $e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$, d.h.

$$\widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(0)\cdot e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\,.$$

Damit ist uns die FOURIER-Transformierte von f bekannt bis auf die Konstante

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt\,.$$

In **[HM1]**, Kap. 2, §6*c)* hatten wir auf dem Umweg über ein zweidimensionales Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

berechnet; über die Substitution $u = t/\sqrt{2}\sigma$ folgt daraus sofort

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt = 1\,.$$

Als Endergebnis erhalten wir somit

$$\widehat{f}(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1/\sigma)}e^{\frac{-\omega^2}{2\cdot(1/\sigma)^2}}\,,$$

wobei die kompliziertere zweite Form zeigt, daß es sich abgesehen vom Vorfaktor $\sqrt{2\pi}/\sigma$ wieder um eine GAUSS-Funktion handelt, allerdings mit Varianz $1/\sigma^2$.

Mit der Abkürzung

$$N_\sigma(t) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$$

können wir kurz schreiben

$$\widehat{N_\sigma}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}N_{1/\sigma}(\omega)\,.$$

Damit kennen wir natürlich auch die inverse FOURIER-Transformierte einer GAUSS-Funktion, denn nach den allgemeinen Rechenregeln ist

$$\check{N}_\sigma(\omega) = \frac{1}{2\pi}\widehat{N_\sigma}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} N_{\frac{1}{\sigma}}(\omega)\,.$$

Insbesondere können wir damit nachrechnen, daß die *inverse* FOURIER-Transformation zumindest in diesem Beispiel tatsächlich invers zur FOURIER-Transformation ist, d.h.

$$\check{\hat{N}}_\sigma(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\check{N}_{\frac{1}{\sigma}}(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sigma}} N_\sigma(t) = N_\sigma(t)\,.$$

Genauso zeigt man, daß auch

$$\hat{\check{N}}_{\sigma(t)} = N_\sigma(t)$$

ist; die beiden Transformationen sind hier also in der Tat invers zueinander.

c) Die Umkehrung der Fourier-Transformation

Wie angekündigt, soll aus dem Beispiel des vorigen Abschnitts nun in einem zweiten Schritt gefolgert werden, daß dies nicht nur für die Funktionen N_σ gilt, sondern für *alle* Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, d.h.

Satz: Die FOURIER-Transformation und die inverse FOURIER-Transformation definieren zueinander inverse lineare Abbildungen

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \hat{f} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ g \mapsto \check{g} \end{cases}.$$

Insbesondere sind also beide Abbildungen Isomorphismen, und für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\check{\hat{f}}(t) = f(t)\,.$$

Für das HERMITEsche Skalarprodukt auf $\mathcal{S}^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\omega)\overline{\check{g}(\omega)}\,d\omega\,,$$

und damit insbesondere auch

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\hat{f}\right\|_2 = \sqrt{2\pi}\left\|\check{f}\right\|_2 \quad \text{mit} \quad \|f\|_2 = \sqrt{(f,f)}\,.$$

Beweis: Die Linearität ist, wie bei jedem Integral, klar; das Problem ist, ob $\hat{f}$ und $\check{g}$ stark abfallend sind. Betrachten wir zunächst nur die Produkte $\omega^r\hat{f}(\omega)$. Für diese ist

$$\left|\omega^r\hat{f}(\omega)\right| = \left|(-i)^r\widehat{f^{(r)}}(\omega)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t)e^{-i\omega t}\,dt\right| \le \int_{-\infty}^{\infty}\left|f^{(r)}(t)\right|dt < \infty\,,$$

da f stark abfallend ist. Für

$$\omega^r\hat{f}^{(k)}(\omega) = \omega^r(-i)^k\widehat{t^k f}(\omega)$$

können wir genauso argumentieren, und wegen des Zusammenhangs zwischen FOURIER-Transformation und inverser FOURIER-Transformation folgt daraus auch das Ergebnis für $\check{g}$.

Als nächstes wollen wir uns überlegen, daß für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\check{\hat{f}}(t) = f(t)$$

ist. Dazu benutzen wir zwei zunächst beliebige weitere Funktionen $g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, die wir im Laufe der Rechnung nach Bedarf genauer festlegen werden.

Nach Definition ist

$$\check{\hat{f}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,;$$

wir betrachten das etwas allgemeinere Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}g(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s}ds\right)e^{i\omega t}g(\omega)\,d\omega\,,$$

das wir nach dem Satz von FUBINI weiter ausrechnen können als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega(s-t)}\,d\omega\right)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\widehat{g}(s-t)\,ds\,.$$

Nun sei a eine positive reelle Konstante und $g(\omega)=h(a\omega)$, wobei die Funktion $h\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ im Augenblick noch beliebig ist. Dann führt die Substitution $\nu=a\omega$ auf

$$\begin{aligned}\widehat{g}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(a\omega)e^{-i\omega s}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)e^{-i\nu\frac{s}{a}}\,\frac{d\nu}{a}\\ &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)e^{-i\nu\frac{s}{a}}\,d\nu = \frac{1}{a}\widehat{h}\left(\frac{s}{a}\right)\,.\end{aligned}$$

und nach obiger Rechnung ist daher

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}h(a\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cdot\frac{1}{a}\cdot\widehat{h}\left(\frac{s-t}{a}\right)\,ds\,.$$

Mit der neuen Variablen

$$u \underset{\text{def}}{=} \frac{s-t}{a}$$

ist $s=t+au$, und wir können diese Formel auch kürzer schreiben als

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}h(a\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+au)\cdot\widehat{h}(u)\,du\,.$$

Beide Seiten sind stetig in a; für $a\to 0$ erhalten wir auf der linken Seite

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}h(0)\,d\omega = h(0)\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = 2\pi\cdot h(0)\cdot\check{\widehat{f}}(t)$$

und rechts

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\widehat{h}(u)\,du = f(t)\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{h}(u)\,du = 2\pi\cdot f(t)\cdot\check{\widehat{h}}(0)\,.$$

Also ist für zwei beliebige Funktionen $f,h\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ stets

$$h(0)\cdot\check{\widehat{f}}(t) = f(t)\cdot\check{\widehat{h}}(0)\,.$$

Setzen wir nun für h speziell eine GAUSS-Funktion ein, etwa

$$h(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{2}}\,,$$

so wissen wir bereits aus dem obigem Beispiel, daß $\check{\widehat{h}}$ und h übereinstimmen; insbesondere haben beide an der Stelle $\omega=0$ den von null verschiedenen Wert $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, so daß wir durch diesen Wert dividieren können und die gewünschte Formel

$$\check{\widehat{f}}(t)=f(t)$$

erhalten. Wegen der Beziehungen

$$\widehat{\widehat{f}}(\omega)=2\pi\check{\check{f}}(-\omega)\quad\text{und}\quad\check{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-\omega)$$

ist dann auch

$$\widehat{\check{f}}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi f\big(-(-\omega)\big)=f(\omega)\,.$$

Zu beweisen bleibt noch, daß die beiden Transformationen auch das HERMITEsche Skalarprodukt auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ respektieren. Dazu wiederholen wir einfach die Rechnung zu Beginn des Beweises ohne den Faktor $e^{i\omega t}$: Für eine beliebige Funktion $g(\omega)$ aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)g(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right)g(\omega)\,d\omega$$

nach dem Satz von FUBINI gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega\right)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g}(t)\,dt\,,$$

wir haben also die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)g(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g}(t)\,dt\,. \qquad (*)$$

Um daraus Aussagen über das HERMITEsche Skalarprodukt herzuleiten, benutzen wir die Beziehungen

$$\hat{\hat{f}}(t) = 2\pi \check{\hat{f}}(-t) = 2\pi f(-t) \quad \text{oder} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}(-t) \qquad (**)$$

und

$$\begin{aligned} \hat{\overline{g}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(t)\,\overline{e^{-i\omega t}}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(t)\,e^{i\omega t}\,dt \\ &= -\int_{\infty}^{-\infty} \overline{g}(-t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(-t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad (***) \\ &= \hat{\overline{g}}(-\omega)\,, \end{aligned}$$

wobei der Übersichtlichkeit halber $\overline{g}$ für diejenige Funktion steht, die jedem Wert t den Funktionswert $\overline{g}(t) = \overline{g(t)}$ zuordnet; entsprechend ist $\hat{\overline{g}}(t) = \overline{\hat{g}(t)}$.

Damit läßt sich das HERMITEsche Skalarprodukt folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} (f,g) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt \underset{(**)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\hat{f}}(-t)\hat{\hat{\overline{g}}}(-t)\,dt \\ &\underset{(*)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\hat{\hat{f}}}(-t)\hat{\overline{g}}(-t)\,dt \underset{(**)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\cdot 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\hat{\overline{g}}(-t)\,dt \\ &\underset{(***)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\overline{\hat{g}}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}(\hat{f},\hat{g})\,. \end{aligned}$$

Die Aussage über das Produkt der inversen FOURIER-Transformierten folgt nun einfach daraus, daß die beiden Transformationen zueinander invers sind:

$$(\check{f},\check{g}) = \frac{1}{2\pi}(\hat{\check{f}},\hat{\check{g}}) = \frac{1}{2\pi}(f,g)\,.$$

■

Bemerkung: Falls wir für beide Transformationen den Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ gewählt hätten, würden beide das HERMITEsche Skalarprodukt respektieren, allerdings müßten wir uns dann ständig mit dieser Wurzel vor den Integralen herumschlagen. So hat jede Normierung ihre Vor- und Nachteile.

§8: Die Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, verhält sich die FOURIER-Transformation auf dem SCHWARTZ-Raum genau so, wie wir es erwarten; leider sind aber die Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum für die meisten Anwendungen zu schön, um nützlich zu sein. Wir brauchen daher einen größeren Funktionenraum, auf dem wir die FOURIER-Transformation immer noch gut verstehen können. Darum geht es in diesem Paragraphen.

a) Quadratintegrierbare Funktionen

Definition: Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *quadratintegrierbar*, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt$$

existiert und konvergiert. Der Vektorraum aller quadratintegrierbarer Funktionen wird mit $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bezeichnet.

Nach Aussage *c)* des ersten Lemmas aus §7*a)* ist jede stark abfallende Funktion quadratintegrierbar, d.h. der SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum von $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Er ist allerdings deutlich kleiner als $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, denn beispielsweise ist auch jeder Rechteckimpuls quadratintegrierbar und allgemeiner jede stückweise stetige Funktion, die außerhalb eines endlichen Intervalls $[a, b]$ identisch verschwindet. Auch Funktionen wie $e^{-|t|}$ liegen in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-|t|}\right|^2\,dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-2t}\,dt = 1\,.$$

Funktionen wie $\sin \omega t$ sind natürlich nicht quadratintegrierbar; aber bei periodischen Funktionen betrachtet man ohnehin sinnvollerweise nur Integrale über eine Periode, nicht solche über die gesamte reelle Achse. (Das ist der aus der Elektrotechnik bekannte Unterschied zwischen Energie- und Leistungssignalen; die Energiesignale sind genau die quadratintegrierbaren.)

Auf dem SCHWARTZ-Raum haben wir ein HERMITEsches Produkt, bezüglich dessen wir das Integral über $|f|^2$ kurz als $\sqrt{(f,\, f)}$ schreiben können; wir wollen uns als nächstes überlegen, daß zumindest die Definition

$$(f,\, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

auch für $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ sinnvoll ist:

Da $\big(|f(t)| - |g(t)|\big)^2 \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, ist nach der binomischen Formel auch

$$|f(t)| \cdot |g(t)| \leq \frac{1}{2}\Big(|f(t)|^2 + |g(t)|^2\Big)\,,$$

also

$$\int_N^M |f(t)g(t)|\; dt \leq \frac{1}{2}\int_N^M f(t)\overline{g(t)}\, dt + \frac{1}{2}\int_N^M g(t)\overline{g(t)}\, dt$$

für alle $N \leq M \in \mathbb{R}$. Rechts konvergieren beide Integrale für $N \to -\infty$ und $M \to \infty$, also auch links, und damit konvergiert das Integral zu $(f,\, g)$ sogar absolut.

Es hat alle Eigenschaften eines HERMITEschen Produkts mit Ausnahme der positiven Definitheit – genau wie wir es vom periodischen Fall her gewohnt sind. Wie dort bezeichnen wir

$$\|f\|_2 \underset{\text{def}}{=} \sqrt{(f,\, f)}$$

kurz, wenn auch schlampig als L^2-Norm von f, denn – wie schon bei den periodischen Funktionen – können die Funktionen $f \not\equiv 0$ mit $\|f\|_2 = 0$ für die meisten Anwendungen *praktisch* vernachlässigt werden.

Definition: $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ heißt *Nullfunktion*, wenn $\|f\|_2 = 0$ ist.

Nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung, die wir in **[HM1]**, *Kap. 1*, §6*c)* aus gutem Grund auch für Produkte bewiesen haben, die nur bis auf die positive Definitheit HERMITEsch sind, ist dann für eine beliebige Funktion $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$

$$|(f,\, g)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 = 0\,,$$

für eine Nullfunktion f verschwindet also jedes Produkt $(f,\, g)$, und umgekehrt ist auch jede Funktion mit dieser Eigenschaft eine Nullfunktion, denn $\|f\|_2$ ist ja die Wurzel aus $(f,\, f)$.

b) Distributionen auf dem Schwartz-Raum

Jede quadratintegrierbare Funktion $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ definiert eine lineare Abbildung

$$\widetilde{T}_f\colon \begin{cases} \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ g \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\, dt \end{cases}$$

Man beachte daß hier, trotz der komplexwertigen Funktionen, keine komplexe Konjugation steht! Vergleich mit dem Produkt

$$(f,\, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{g(t)}\, dt$$

zeigt, daß

$$\widetilde{T}_f(g) = (f,\, \overline{g}) = (g,\, \overline{f})$$

ist. Insbesondere ist $\widetilde{T}_f$ genau dann gleich der Nullabbildung, wenn f eine Nullfunktion ist.

Da der SCHWARTZ-Raum ein Untervektorraum von $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},\, \mathbb{C})$ ist, können wir $\widetilde{T}_f$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ einschränken und die lineare Abbildung

$$T_f\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\, dt \end{cases}$$

betrachten. Mit Hilfe dieser Abbildung wollen wir im folgenden Eigenschaften von f und seiner FOURIER-Transformierten (über deren Existenz wir noch nichts wissen) auf Eigenschaften stark abfallender Funktionen zurückführen.

Die Abbildung T_f existiert nicht nur für quadratintegrierbare Funktionen f, sondern allgemeiner für *jede* Funktion, deren Betrag höchstens polynomial ansteigt:

Lemma: Falls es zu einer stückweise stetigen Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Konstanten $k \in \mathbb{N}_0$ und $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so daß

$$|f(t)| \le c \cdot |t|^k$$

ist, existiert $T_f(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist $t^\ell \varphi(t)$ beschränkt für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$, insbesondere also für $\ell = k$ und $\ell = k + 2$. Damit ist auch deren Summe beschränkt, es gibt also eine Konstante $M > 0$, für die

$$\left|t^k(1+t^2)\varphi(t)\right| = \left|t^k\varphi(t) + t^{k+2}\varphi(t)\right| \le M$$

ist. Damit folgt

$$\left|(1+t^2)f(t)\varphi(t)\right| \le \left|(1+t^2)ct^k\varphi(t)\right| \le cM$$

und

$$|f(t)\varphi(t)| \le \frac{cM}{1+t^2}\,.$$

Da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cM}{1+t^2}\,dt = cM \arctan t\,\Big|_{-\infty}^{\infty} = cM\pi$$

konvergiert, ist auch das Integral $T_f(\varphi)$ über die linke Seite der Gleichung absolut konvergent. ∎

Außerdem hat T_f eine Stetigkeitseigenschaft, die wir im Hinblick auf spätere Anwendungen gleich etwas allgemeiner formulieren wollen:

Lemma: $\varphi_n: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $f, \varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ seien Funktionen derart, daß die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi_n(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt$$

existieren. Außerdem sei f beschränkt und

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|\;dt \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt\,.$$

Beweis: Ist $|f(t)| \le M$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so ist

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_n(t)\,dt\right| &\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\cdot|\varphi(t)-\varphi_n(t)|\;dt\\ &\le M\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)-\varphi_n(t)|\;dt\,,\end{aligned}$$

und letztere ist das M-fache einer Nullfolge, also selbst Nullfolge. ∎

Wir wollen dies anwenden auf Funktionen φ aus dem SCHWARTZ-Raum und Funktionen f, die höchstens polynomial ansteigen, die aber nicht notwendigerweise beschränkt sind. Um das zu kompensieren, führen wir für Folgen aus dem SCHWARTZ-Raum einen stärkeren Konvergenzbegriff ein, wobei wir (wie schon bei der Definition einer stark abfallenden Funktion) gleich so viel wie nur irgendwie möglich fordern:

Definition: Eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergiert gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, wenn für alle $r, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^k \left(\varphi^{(r)}(t) - \varphi_n^{(r)}(t)\right)\right| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty\,.$$

Wir fordern also, daß *alle* Produkte von t-Potenzen und Ableitungen von φ_n gegen die entsprechende Konstruktion für φ konvergieren. Unter dieser extrem starken Voraussetzung verwundert nicht

Lemma: f sei eine stückweise stetige Funktion, die einer Abschätzung der Form $|f(t)| \le ct^k$ genüge. Dann ist für jede gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergente Folge von Funktionen $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n\to\infty} T_f(\varphi_n) = T_f(\varphi)\,.$$

Beweis: Wir gehen ähnlich vor wie beim Beweis der Existenz von $T_f(\varphi)$: Für jedes $\ell \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^\ell \big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big)\right|$$

eine Nullfolge, es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^\ell \big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big)\right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N\,.$$

Insbesondere gibt es solche Werte für $\ell = k$ und für $\ell = k+2$, und damit gibt es auch zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^k (1+t^2)\big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big)\right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N\,,$$

d.h.

$$\left| t^k \big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big)\right| < \frac{\varepsilon}{1+t^2} \quad \text{für alle } n > N \text{ und } t \in \mathbb{R}\,.$$

Damit ist

$$\big|T_f(\varphi) - T_f(\varphi_n)\big| \le \int_{-\infty}^{\infty} \big| f(t)\big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big)\big|\, dt$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \left| ct^k \big(\varphi(t) - \varphi_n(t)\big)\right| dt \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c\varepsilon}{1+t^2}\, dt = c\pi\cdot\varepsilon$$

für alle $n > N_0$. Da c und π konstant sind und wir ε beliebig klein machen können, folgt die Behauptung. ∎

Definition: Eine *Distribution* auf dem SCHWARTZ-Raum ist eine lineare Abbildung $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, so daß für jede gegen ein $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergente Folge stark abfallender Funktionen φ_n gilt:

$$\lim_{n\to\infty} T_f(\varphi_n) = T_f(\varphi)\,.$$

Nach dem gerade bewiesenen Lemma ist also T_f für jede stückweise stetige Funktion f, die nicht stärker als ein Polynom wächst, eine Distribution auf dem SCHWARTZ-Raum.

Das sind allerdings bei weitem noch nicht alle Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum: Beispielsweise ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ auch

$$\Delta_a\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto \varphi(a) \end{cases}$$

eine Distribution: Die Linearität ist klar, und für eine gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergente Folge stark abfallender Funktionen φ_n ist insbesondere

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|$$

eine Nullfolge, erst recht also $|\varphi(a) - \varphi_n(a)|$, so daß es auch mit der Stetigkeit keine Probleme gibt.

Diese Distribution bezeichnet man als DIRACsche Delta-Distribution. Nicht ganz korrekt spricht man auch von einer DIRACschen Delta-Funktion und schreibt, gerade so als sei Δ_a von der Form T_δ,

$$\Delta_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \Delta_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t)\,dt\,.$$

Die Schreibweise $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t) = f(a)$ findet man nicht nur für Funktionen f aus dem SCHWARTZ-Raum, sondern oft auch für beliebige stetige Funktionen f.

PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC (1902–1984) wuchs auf in England als Sohn eines Schweizer Vaters und einer englischen Mutter. Trotz großem Interesse an der Mathematik studierte er von 1918–1921 Elektrotechnik an der Universität Bristol, da er auf keinen Fall Lehrer werden wollte. 1921 erhielt er ein Stipendium der Universität Cambridge; da dieses aber nicht zum Leben gereicht hätte, blieb er in Bristol, wo ihn die Universität von Studiengebühren befreite und seinen Wechsel in die Mathematik erlaubte. Ab 1923 arbeitete er in Cambridge an seiner Dissertation über Quantenmechanik, die er 1926 abschloß. 1930 folgte ein Buch über Quantenmechanik, für das er 1933 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet wurde. 1932 bekam er einen Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Cambridge. Nach seiner Emeritierung lebte er in Florida, wo er 1971 Physikprofessor an der Florida State University wurde. Zentrales Thema seiner Arbeiten war die Anwendung mathematischer Methoden auf die Quantenmechanik und die Relativitätstheorie sowie auch Ansätze zur (bis heute nicht befriedigend gelösten) Vereinheitlichung dieser beiden Theorien.

Wenn es wirklich eine *Funktion* $\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gäbe, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\,dt = f(0)$$

wäre für jede (stark abfallende oder auch einfach stetige) Funktion f, so müßte $\delta(t)$ für $t \neq 0$ verschwinden – abgesehen eventuell von einigen isolierten Punkten, die für die Integration bedeutungslos sind. Damit müßte aber unabhängig vom Funktionswert $\delta(0)$ und unabhängig von der Funktion f das Integral verschwinden.

Die „Lösung“, $\delta(0) = \infty$ zu setzen, führt nicht zu einer sinnvollen Interpretation des linksstehenden Integrals, denn wenn man einen Ausdruck wie $2 \cdot \infty$ überhaupt interpretieren kann, dann wohl nur im Sinne von $2 \cdot \infty = \infty$ tun, und damit wäre $2\delta(t) = \delta(t)$, obwohl die Distributionen

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto \varphi(0) \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \quad \varphi \mapsto 2\varphi(0) \end{cases}$$

wohldefiniert und offensichtlich verschieden sind.

Die Schreibweise mit einer „Funktion“ δ ist also in mehrfacher Hinsicht problematisch, hat sich aber gerade in der technischen Literatur eingebürgert und soll daher auch hier verwendet werden. Man sollte sich aber klar machen, daß man nur Ausdrücke wie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-x) f(t)\,dt = f(x)$$

sinnvoll interpretieren kann, in anderen Zusammenhängen hat $\delta(t)$ keine vernünftige Bedeutung.

Problemlos unter einem Integralzeichen sind auch Linearkombinationen der Art

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \delta(t - t_k)\,,$$

denn Linearkombinationen von Distributionen sind wieder Distributionen. Im vorliegenden Fall wäre dies die Distribution

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \Delta_{t_k}\,,$$

für eine stark abfallende Funktion φ ist also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \delta(t - t_k) \right) \varphi(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k \Delta_{t_k}(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi(t_k)\,,$$

und da man zumindest die DIRAC-Distribution auch einfach als lineare Abbildung auf $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ betrachtet, kann man dies auch für eine beliebige stetige Funktion φ sinnvoll interpretieren.

So ist beispielsweise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1) e^{i\omega t}\,dt = e^{i\omega}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \big(\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1) \big) e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t\,.$$

Da wir nur Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum betrachten, sind auch viele unendliche Linearkombinationen wie etwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k\Delta_k$$

wohldefiniert, denn für eine stark abfallende Funktion φ konvergieren sowohl

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k) \quad \text{als auch} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k\varphi(k)\,.$$

Wir können eine Distribution T auf dem SCHWARTZ-Raum nicht nur mit Konstanten multiplizieren, sondern allgemeiner auch mit mit einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion g, die höchstens polynomiales Wachstum hat: Für eine Distribution der Form T_f ist

$$T_{gf}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(g(t)\varphi(t)\big)\,dt = T_f(g\varphi)\,,$$

da auch $g\varphi$ eine stark abfallende Funktion ist. Somit können wir für eine beliebige Distribution T auf dem SCHWARTZ-Raum das Produkt

$$gT\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto T(g\varphi) \end{cases}$$

definieren. Beispielsweise gehört $t\delta(t)$ zur Distribution

$$t\Delta_0\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \Delta_0(t\varphi) = (t\varphi)(0) = 0\cdot\varphi(0) = 0\,, \end{cases}$$

d.h. $t\delta = 0$. Man überlegt sich leicht, daß für jede Funktion g wie oben gilt $g\delta = g(0)\delta$.

Problematischer ist die Definition eines Produkts von Distributionen: Die obige Rechnung drückt T_{gf} aus durch T_f und g, nicht aber durch T_f und T_g, wie wir es bräuchten, um ein Produkt zweier Distributionen zu definieren. Auch sonstige Versuche, den Ausdruck $T_{gf}(\varphi)$ umzuformen, führen nicht zu brauchbareren Ergebnissen, und in der Tat kann man in der Theorie der Distributionen ein Produkt nur als Linearform auf dem

SCHWARTZ-Raum der stark abfallenden Funktionen *zweier* Veränderlicher definieren. Dieser Raum wird weiter hinten zwar kurz erwähnt werden, es würde aber zu weit führen, ihn wirklich zu behandeln. Wir wollen daher nur festhalten, daß Produkte von δ-„Funktionen" nicht sinnvoll als Distributionen auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiert werden können und.

Ähnlich ist es mit Ausdrücken der Form $e^{\delta(t)}$ oder $\sin\delta(t)$: Da beispielsweise

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{f(t)}\varphi(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{\varphi(t)}\,dt$$

nichts miteinander zu tun haben (und $e^{\varphi(t)}$ nicht einmal eine stark abfallende Funktion ist), können wir hier nicht einfach die Exponentialfunktion ins Argument von T_f schieben, und es ist gibt auch keine sonstige Art und Weise, Ausdrücken wie $e^{\delta(t)}$ oder $\sin\delta(t)$ einen Sinn zu geben. Bei der Funktionsschreibweise von Distributionen muß man sich also stets sorgfältig überlegen, ob ein gegebener Ausdruck wirklich sinnvoll ist oder nicht.

c) Die Fourier-Transformierte einer Distribution

f sei eine absolut integrierbare Funktion, d.h. das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$$

konvergiere gegen einen endlichen Wert. Dann ist auch $f(t)e^{-i\omega t}$ absolut integrierbar, da diese Funktion den gleichen Betrag hat wie $f(t)$, und damit konvergiert auch das FOURIER-Integral

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

absolut. Da Multiplikation des Integranden mit einer stark abfallenden Funktion φ nichts an der absoluten Integrierbarkeit ändert, ist auch die lineare Abbildung

$$T_{\widehat{f}} \colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\varphi(t)\,dt \end{cases}$$

wohldefiniert, und nach dem Satz von FUBBINI gilt für alle stark abfallenden Funktionen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$T_{\widehat{f}}(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\,\varphi(\omega)\,d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \right) \varphi(\omega)\,d\omega$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega \right) dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{\varphi}(t)\,dt = T_f(\widehat{\varphi}) .$$

Dies legt folgende Definition nahe:

Definition: Die FOURIER-Transformierte der Distribution $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ ist die Distribution

$$\widehat{T}\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto T(\widehat{\varphi}) \end{cases} ;$$

die inverse FOURIER-Transformierte von T ist

$$\check{T}\colon \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto T(\check{\varphi}) \end{cases} .$$

Zunächst müssen wir uns überlegen, ob das überhaupt sinnvoll ist:

Lemma: Für eine Distribution $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ sind auch $\widehat{T}$ und $\check{T}$ wieder Distributionen und $\check{\widehat{T}} = \widehat{\check{T}} = T$.

Beweis: Die letzte Aussage folgt sofort aus den Definitionen sowie der entsprechenden Aussage für starkabfallende Funktionen in §7*c)*. Auch die Linearität von $\widehat{T}$ ist klar, da die FOURIER-Transformation auf dem SCHWARTZ-Raum eine lineare Operation ist, d.h. die FOURIER-Transformierte von $\lambda\varphi + \mu\psi$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ist $\lambda\widehat{\varphi} + \mu\widehat{\psi}$.

Für die Stetigkeit von $\widehat{T}$ genügt es wegen der Stetigkeit von T, wenn wir zeigen, daß für eine konvergente Folge von Funktionen $\varphi_n(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit Grenzwert $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ auch die Folge der FOURIER-Transformierten $\widehat{\varphi_n}$ gegen $\widehat{\varphi}$ konvergiert. Wir müssen also zeigen, daß für je zwei Zahlen $k, r \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \left| \omega^k \widehat{\varphi_n}^{(r)}(\omega) - \omega^k \widehat{\varphi}^{(r)}(\omega) \right| = 0 .$$

Nach den Formeln aus §6*b)* ist

$$\omega^k \widehat{\varphi}^{(r)}(\omega) = \omega^k \cdot (-i)^r \widehat{t^r\varphi}(\omega) = (-i)^r \cdot \omega^k \widehat{t^r\varphi}(\omega)$$

$$= (-i)^r \cdot (-i)^k \widehat{\psi}(\omega) = (-i)^{r+k} \widehat{\psi}(\omega) \quad \text{mit} \quad \psi = \frac{d^k\left(t^r\varphi(t)\right)}{dt^k} .$$

Durch k-fache Anwendung der Produktregel folgt, daß ψ Linearkombination von Termen der Form $t^\ell \varphi^{(s)}$ ist. Wegen der Dreiecksungleichung reicht es also, zu zeigen, daß für alle $\ell, s \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \left| \widehat{t^\ell\varphi_n^{(s)}}(\omega) - \widehat{t^\ell\varphi^{(s)}}(\omega) \right| = 0 .$$

Nach Definition der Konvergenz in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gibt es zu ℓ, s und jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geq N_1$ gilt

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^\ell \varphi_n^{(s)}(t) - t^\ell \varphi^{(s)}(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Genauso gibt es auch ein $N_2 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geq N_2$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^{\ell+2} \varphi_n^{(s)}(t) - t^{\ell+2} \varphi^{(s)}(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist; für n größer oder gleich dem Maximum N_0 von N_1 und N_2 gilt also

$$\left| t^\ell \varphi_n^{(s)}(t) - t^\ell \varphi^{(s)}(t) \right| < \frac{\varepsilon}{1+t^2} \qquad \text{und}$$

$$\left| \widehat{t^\ell\varphi_n^{(s)}}(\omega) - \widehat{t^\ell\varphi^{(s)}}(\omega) \right| = \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(t^\ell \varphi_n^{(s)}(t) - t^\ell \varphi^{(s)}(t) \right) e^{-i\omega t}\,dt \right|$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| t^\ell \varphi_n^{(s)}(t) - t^\ell \varphi^{(s)}(t) \right| dt \leq \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \varepsilon\pi ,$$

der Limes für $n \to \infty$ ist also gleich null, wie behauptet. ∎

Um zu sehen, was die neue Definition bringt, wollen wir die FOURIER-Transformierte des Sinus berechnen: Im klassischen Sinne als

$$\widehat{\sin}\,\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \sin t \cdot e^{-i\omega t}\,dt$$

existiert sie bekanntlich nichts. Im Distributionensinne ist

$$\widehat{T}_{\sin}(\varphi) = T_{\sin}(\widehat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega\,\widehat{\varphi}(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\omega} - e^{-i\omega})\,\widehat{\varphi}(\omega)\,dt$$

$$= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\omega)e^{i\omega}\,d\omega - \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\omega)e^{i\omega}\,d\omega$$

$$= \frac{2\pi}{2i}\left(\check{\widehat{\varphi}}(1) - \check{\widehat{\varphi}}(-1)\right) = -\pi i\big(\varphi(1) - \varphi(-1)\big)\,,$$

denn für jede Funktion g ist

$$\check{g}(1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega}\,d\omega \quad \text{und} \quad \check{g}(-1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega}\,d\omega\,.$$

Für die oben eingeführte DIRAC-Distribution gilt

$$\Delta_a(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\varphi(t)\,dt = \varphi(a)\,,$$

und damit ist

$$\widehat{T}_{\sin} = -\pi i\big(\Delta_1 - \Delta_{-1}\big)\,.$$

Kurz, wenn auch etwas kriminell, können wir dies als

$$\widehat{\sin}(\omega) = -\pi i\big(\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)\big)$$

schreiben.

Falls diese Rechnung auf ein sinnvolles Ergebnis führte, sollte

$$\sin t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\sin}\,\omega \cdot e^{i\omega t}\,d\omega$$

sein, und in der Tat ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (-\pi i)\big(\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)\big)e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$= -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-1)e^{i\omega t}\,d\omega + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega+1)e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$= -\frac{i}{2}\big(e^{it} - e^{-it}\big) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin t\,.$$

d) Der Satz von Riesz

Der letzte Abschnitt hat gezeigt, daß die FOURIER-Transformation auf dem Niveau der Distributionen weitgehend unproblematisch ist. Was uns in erster Linie interessiert, sind aber Aussagen über die FOURIER-Transformation auf dem Niveau der *Funktionen;* wir müssen also wissen, wie wir von Distributionen wieder zurückkommen zu Funktionen. Wie das Beispiel der DIRAC-Distribution zeigt, ist das nicht immer möglich; wir müssen uns also zuerst überlegen, was Distributionen der Form T_f mit $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ auszeichnet.

Betrachten wir dazu für $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ zunächst die lineare Abbildung

$$\widetilde{T}_f\colon \begin{cases} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ \qquad g \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,dt \end{cases}.$$

Wie im Fall von T_f rechnet man auch hier schnell nach, daß $\widetilde{T}_f$ der Stetigkeitsbedingung

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{T}_f(g_n) = \widetilde{T}_f\big(\lim_{n\to\infty} g_n\big)$$

genügt, hier allerdings für bezüglich der L^2-Norm konvergente Folgen (g_n).

Außerdem ist nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung

$$\big|T_f(g)\big| = |(f, \overline{g})| \le \|f\|_2 \cdot \|\overline{g}\|_2 = \|f\|_2 \cdot \|g\|_2\,,$$