WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

8. März 2005

Nachklausur Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Wo ist die Funktion $f(z) = \dfrac{z}{4+z^2}$ holomorph?

Lösung: Überall außer in den beiden Punkten $z = \pm 2i$, wo sie Pole erster Ordnung hat.

2) Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{(z+1)^2}\,dz$ für den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreis mit Radius drei!

Lösung: Der Integrand ist meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ und hat nur bei $z = -1$ einen Pol. Da dies ein Pol zweiter Ordnung ist, verschwindet das Residuum; der Wert des Integrals ist also Null.

3) Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{x^5+1}\,dx$?

Lösung: Die Ableitung des Nenners ist $5x^4$, also das Fünffache des Zählers; somit ist $\ln\left|x^5+1\right|$ eine Stammfunktion für $x > 1$ und auch für $x < -1$. Da ihr Limes für $x \to \pm\infty$ nicht existiert und auch kein Grenzwert für $x \to -1$, divergiert das Integral.

4) *Richtig oder falsch:* Ist A eine invertierbare symmetrische Matrix, so ist auch die inverse Matrix A^{-1} symmetrisch.

Lösung: *Richtig:* A ist genau dann symmetrisch, wenn ${}^tA = A$ ist. Ist B die inverse Matrix zu A, so ist ${}^tB\,{}^tA = {}^t(AB) = {}^tE = E$ und ${}^tA\,{}^tB = {}^t(BA) = {}^tE = E$, also ist ${}^tB = ({}^tA)^{-1} = A^{-1} = B$.

5) *Richtig oder falsch:* Die Determinante der 5×5-Matrix A mit $a_{k\ell} = (k+\ell) + i(k-\ell)$ ist reell.

Lösung: *Richtig,* denn $a_{\ell k} = (\ell+k)+i(\ell-k) = (k+\ell)-i(k-\ell) = \overline{a_{k\ell}}$, die Matrix ist also HERMITEsch und somit diagonalisierbar mit lauter reellen Eigenwerten. Deren Produkt, die Determinante, ist somit auch reell.

6) Welche Nullstellen hat das Polynom $f(x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 8x - 12$?

Lösung: Das Produkt aller Nullstellen ist zwölf und ihre Summe eins; *falls* alle Nullstellen ganzzahlig sein sollten, sind sie Teiler von zwölf. Einsetzen zeigt, daß $f(x)$ für $x = \pm 1$, $x = 2$ und $x = -3$ verschwindet, womit vier Nullstellen gefunden sind. Deren Produkt ist sechs, das Produkt aller fünf Nullstellen aber 12; somit muß $x = 2$ eine doppelte Nullstelle sein.

7) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y(t)}$ mit $y(0) = 0$ hat genau eine Lösung.

Lösung: *Falsch:* $y(t) \equiv 0$ ist ganz offensichtlich eine Lösung; Trennung der Veränderlichen führt auf $\int_0^y \frac{3}{2}\eta^{-1/3}\,d\eta = \int_0^t d\tau$ oder $y^{2/3} = t$, was die weitere Lösung $y(t) = t^{3/2}$ ergibt.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{12x^2}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx$!

Lösung: Bei Integralen einer solchen Bauart führt meist der Umweg über die komplexen Zahlen am schnellsten zu Erfolg. Wie im Komplexen üblich, benennen wir die Variable um in z, schreiben den Integranden also in der Form

$$f(z) = \frac{12z^2}{z^2 + 5z^2 + 4}\,.$$

Wir müssen zunächst die Pole von f bestimmen:

Da im Nenner nur gerade Potenzen von z vorkommen, bietet sich an, zunächst die Quadrate der Nullstellen zu berechnen: Nach VIÈTE oder einer der Lösungsformeln für quadratische Gleichungen folgt leicht, daß

$$z^4 + 5z^2 + 4 = (z^2 + 1)(z^2 + 4)$$

ist, die Nullstellen des Nenners sind also $\pm i$ und $\pm 2i$. Da der Zähler für keine dieser vier Zahlen verschwindet, sind sie allesamt Polstellen von f.

Der Integrationsweg γ_R sei der Halbkreis um den Nullpunkt vom Punkt R durch die obere Halbebene zum Punkt $-R$; in Formeln also $\gamma_R\colon [0,\pi] \to \mathbb{C};\quad t \mapsto Re^{it}$.

δ_R sei der Integrationsweg, der mit γ_R beginnt und dann entlang der reellen Achse von $-R$ nach R geht. Damit ist δ_R eine geschlossene Kurve, und Integrale entlang δ_R können nach dem Residuensatz berechnet werden.

Für $R > 2$ liegen im Innern des von δ_R berandeten Halbkreises die beide Pole $z_1 = i$ und $z_2 = 2i$. Beide sind Pole erster Ordnung, d.h. $\mathrm{Res}_{z=z_\nu} f(z) = \lim_{z\to z_\nu}(z - z_\nu)f(z)$.

Damit ist $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z\to z_1}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{12z^2}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{-12}{2i\cdot(-1+4)} = \frac{-4}{2i} = 2i\,.$

und genauso $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \lim_{z\to z_2}(z-2i)f(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{8z^2}{(z^2+1)(z+2i)} = \frac{12\cdot(-4)}{(-4+1)\cdot 4i} = -4i\,.$

Nach dem Residuensatz ist daher

$$\int_{\delta_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=2i} f(z)\right) = 2\pi i(2i - 4i) = 4\pi\,.$$

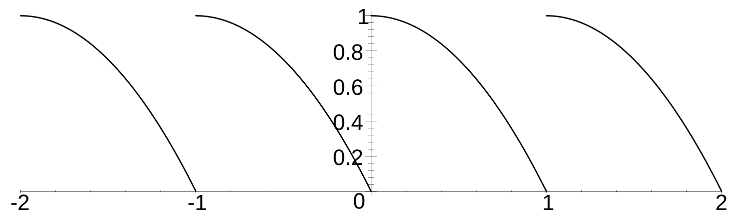
Das ist auch der Wert des gesuchten Integrals, denn da der Grad des Zähler um zwei kleiner ist als der des Nenners, verschwindet das Integral über γ_R für $R \to \infty$, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{\delta_R} f(z)\,dz = 4\pi\,.$$

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Sei $f(t) = 1 - t^2$ für $0 \le t < 1$, periodisch fortgesetzt mit Periode eins.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-2, 2]$!

Lösung: Der Graph von $f(t)$ zwischen 0 und 1 ist ein von 1 auf 0 abfallender Parabelbogen; das Bild sieht also aus wie eine abgerundete Sägezahnkurve aus:



b) Ist f gerade, ungerade oder keins von beiden?

Lösung: Offensichtlich keins von beiden.

c) Berechnen Sie die reelle FOURIER-Reihe von f!

Lösung: Der konstante Term, das Periodenmittel, ist

$$c_0 = \int_0^1 (1 - t^2)\,dt = t - \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Da die Periode eins ist, haben wir die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi$. Die Koeffizienten der Kosinusterme und der Sinusterme können mit Hilfe der Formelsammlung am Ende der Klausur leicht ausgerechnet werden: Da die Integrale von Sinus und Kosinus über ganze Perioden verschwinden, ist

$$\int_0^1 \cos 2k\pi t\,dt = \int_0^1 \sin 2\pi\ell t = 0$$

und damit

$$\begin{aligned}
a_k &= -2\int_0^1 t^2 \cos 2k\pi t\,dt = -2\cdot\left(\frac{(2k\pi t)^2 - 2}{(2k\pi)^3}\sin 2k\pi t + \frac{2t}{(2k\pi)^2}\cos 2k\pi t\right)\Big|_0^1 \\
&= -2\cdot\left(\frac{2}{(2k\pi)^2}\right) = -\frac{1}{(k\pi)^2} \\
b_\ell &= -2\int_0^1 t^2 \sin 2\ell\pi t\,dt = -2\cdot\left(\frac{2 - (2\ell\pi t)^2}{(2\ell\pi)^3}\cos 2\ell\pi t + \frac{2t}{(2\ell\pi)^2}\sin 2\ell\pi t\right)\Big|_0^1 \\
&= -2\cdot\left(\frac{2 - (2\ell\pi)^2}{(2\ell\pi)^3} - \frac{2}{(2\ell\pi)^3}\right) = \frac{1}{\ell\pi}.
\end{aligned}$$

Die FOURIER-Reihe von f ist somit

$$S_f(t) = \frac{2}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi t}{(k\pi)^2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin 2\ell\pi t}{\ell\pi}.$$

d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie sonst?

Lösung: Die FOURIER-Reihe konvergiert zumindest überall dort gegen $f(t)$, wo f stetig ist, also überall außer bei den ganzzahligen Werten. Dort haben wir jeweils von der einen

Seite her Grenzwert null und von der anderen Grenzwert eins, die Reihe konvergiert daher gegen deren Mittelwert $\frac{1}{2}$.

e) Für welche $t \in \mathbb{R}$ tritt das GIBBS-Phänomen auf?

Lösung: Nur für die in *d)* bestimmten Sprungstellen, also die ganzen Zahlen.

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*
Berechnen Sie die Ableitung im Distributionensinn der Funktion f aus Aufgabe 2!

Lösung: Wir wissen, daß die Ableitung im Distributionensinn überall dort, wo die Funktion differenzierbar ist, mit der Ableitung selbst übereinstimmt, während jede Sprungstelle a einen Term $\big(f(a^+) - f(a^-)\big) \cdot \delta(t-a)$ liefert. Für die obige Funktion f führt dies auf $\dot{T}_f(\varphi) = T_g(\varphi) + \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k)$, wobei $g(t) = -2t$ für $0 \le t < 1$ periodisch fortgesetzt wird mit Periode eins, und als „Funktion“ geschrieben ist die Ableitung gleich $\dot{f}(t) = g(t) + \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \delta\big(t-k\big)$.

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von $f_c(t) = c^2 - t^2$ für $|t| \le c$ und Null sonst in reeller Form!

Lösung: Mit Hilfe der Formelsammlung am Ende der Klausur ergibt sich

$$\begin{aligned}
\widehat{f_c}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_c(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-c}^{c} (c^2-t^2)e^{-i\omega t}\,dt = c^2\int_{-c}^{c} e^{-i\omega t}\,dt - \int_{-c}^{c} t^2e^{-i\omega t}\,dt \\
&= c^2\cdot\frac{e^{-i\omega c}-e^{i\omega c}}{-i\omega} - \frac{(-i\omega t)^2+2i\omega t+2}{(-i\omega)^3}e^{-i\omega t}\bigg|_{-c}^{c} \\
&= \frac{2c^2\sin\omega c}{\omega} - \frac{-\omega^2c^2(e^{-i\omega c}-e^{i\omega c})+2i\omega c(e^{-i\omega c}+e^{i\omega c})+2(e^{-i\omega c}-e^{i\omega c})}{i\omega^3} \\
&= \frac{2c^2\sin\omega c}{\omega} - \frac{2c^2\sin\omega c}{\omega} - \frac{4c}{\omega^2}\cos\omega c + \frac{4}{\omega^3}\sin\omega c \\
&= \frac{4}{\omega^3}\sin\omega c - \frac{4c}{\omega^2}\cos\omega c\,.
\end{aligned}$$

b) *Ditto* für $g(t) = \dfrac{\sin t}{t^3} - \dfrac{\cos t}{t^2}$!

Lösung: $4g(\omega)$ ist, wie gerade gesehen haben, die FOURIER-Transformierte von $f_1(t)$, also ist $g(\omega)$ die FOURIER-Transformierte von $\frac{1}{4}f(t)$. Die inverse FOURIER-Transformierte von $g(t)$ ist also $\frac{1}{4}f(\omega)$, und damit ist

$$\widehat{g}(\omega) = 2\pi\check{g}(-\omega) = \frac{2\pi}{4}f_1(-\omega) = \frac{\pi}{2}f_1(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(1-\omega^2) & \text{für } |\omega| \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

c) Was ist die FOURIER-Transformierte von $f_1 * g$?

Lösung: Die FOURIER-Transformierte von $f_1 * g$ ist

$$\widehat{f_1 * g}(\omega) = \widehat{f_1}(\omega)\cdot\widehat{g}(\omega) = 4g(\omega)\cdot\frac{\pi}{2}f_1(\omega) = \begin{cases} 2\pi\left(\frac{\sin\omega}{\omega^3} - \frac{\cos\omega}{\omega^2}\right)(1-\omega^2) & \text{für } |\omega| \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Aufgabe 5: (*7 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda \cdot (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 4) = (\lambda + 2)^2 (\lambda - 2)^2 \,.$$

Es gibt also die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$, beide mit algebraischer Vielfachheit zwei.

Zur Berechnung der geometrischen Vielfachheiten brauchen wir die Eigenräume zu λ_1 und λ_2.

Für $\lambda_1 = 2$ erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -2x & + & y & + & 2z & - & w & = & 0 \\ & & -2y & & & + & 2w & = & 0 \\ 2x & - & y & - & 2z & + & w & = & 0 \\ & & 2y & & & - & 2w & = & 0 \end{array}$$

Wie die zweite und die vierte Gleichung zeigen, ist $w = y$; dies in die beiden anderen Gleichungen eingesetzt ergibt in beiden Fällen die Gleichung $2x - 2z = 0$, d.h. $x = z$. Das Gleichungssystem hat somit einen zweidimensionalen Lösungsraum, aufgespannt von den beiden Vektoren

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Für $\lambda_2 = -2$ ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & 2z & - & w & = & 0 \\ & & 2y & & & + & 2w & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 2z & + & w & = & 0 \\ & & 2y & & & + & 2w & = & 0 \end{array}$$

Hier zeigen die zweite und die vierte Gleichung, daß $w = -y$ sein muß; dies in die beiden anderen Gleichungen eingesetzt ergibt die beiden Gleichungen $2x \pm 2y + 2z = 0$, die nur dann beide erfüllt sein können, wenn y verschwindet. Das Gleichungssystem hat somit nur einen eindimensionalen Lösungsraum, aufgespannt von $\vec{b}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Lösung: *Nein,* denn die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_2 = -2$ ist kleiner als die algebraische.

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt Δ?

Lösung: Um eine Basis von $\mathbb{R}^4$ zu finden, bezüglich derer die Matrix Dreiecksgestalt hat, brauchen wir zunächst noch einen Hauptvektor zweiter Stufe zu $\lambda_2 = -2$. Da

$$(A+2E)^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

ist, erkennt man sofort

$$\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\vec{b}_4 + 2\vec{b}_3$$

als einen möglichen Hauptvektor zweiter Stufe. d.h. $A\vec{b}_3 = 2\vec{b}_1 + 6\vec{b}_2$.
Bezüglich der Basis aus den Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ hat A somit die Dreiecksgestalt

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

d) Läßt sich auch eine Orthonormalbasis finden, bezüglich derer A Dreiecksgestalt hat?

Lösung: Die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ und $\vec{b}_4$ sind bereits orthogonal zueinander; normiert man sie auf Länge eins, multipliziert sie also mit $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, erhält man so eine Orthonormalbasis.

e) Berechnen Sie die Matrizen $e^{\Delta t}$ und e^{At}! *Hinweis:* Was wissen Sie über Matrizen, deren Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis bilden? Was gilt bei Orthogonalbasen?

Lösung: Wir schreiben

$$\Delta = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

offensichtlich ist N^2 die Nullmatrix. Da nach der allgemeinen Theorie (und wie man auch trivialerweise sieht) $DN = ND$ ist, folgt $e^{\Delta t} = e^{Dt}e^{Nt} = e^{Dt}(E + Nt)$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 2te^{-2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Mit der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist $e^{At} = Be^{\Delta t}B^{-1}$; wir brauchen also B^{-1}.
Das kann man entweder mit dem GAUSS-Algorithmus bestimmen, oder aber sich daran erinnern, daß für eine Matrix, deren Spalten eine Orthonormalbasis bilden, die inverse Matrix einfach gleich der transponierten ist. Wir haben nur eine Orthogonalbasis, deren

Vektoren mit sich selbst jeweils das Skalarprodukt zwei haben; deshalb ist hier

$$B \cdot {}^{t}B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und daher

$$B^{-1} = \frac{1}{2}{}^{t}B = \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das elementare, aber unangenehme Ausmultiplizieren ergibt schließlich

$$\begin{aligned} e^{At} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t}+e^{-2t} & 2te{-}2t & e^{2t}-e{-}2t & -2te^{-2} \\ 0 & e^{2t}+e^{-2t} & 0 & e^{2t}-e^{-2t} \\ e^{2t}-e^{-2t} & -2te^{-2t} & e^{2t}+e^{-2t} & 2te^{-2t} \\ 0 & e^{2t}-e^{-2t} & 0e^{2t}+e^{-2t} & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh 2t & te^{-2t} & \sinh 2t & -te^{-2} \\ 0 & \cosh 2t & 0 & \sinh 2t \\ \sinh 2t & -te^{-2t} & \cosh 2t & te^{-2t} \\ 0 & \sinh 2t & 0 & \cosh 2t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6: (*4 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ mit den Anfangsbedingungen $\vec{y}(0) = \vec{v}$ für

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Nach der allgemeinen Theorie ist $\vec{y}(t) = e^{At}\vec{v}$. Die Matrix A ist bereits eine Dreiecksmatrix in Blockgestalt, wobei in jedem einzelnen Block die Diagonaleinträge konstant sind. Schreiben wir daher

$$A = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so kommutieren D und N, d.h. $e^{At} = e^{Dt}e^{Nt}$.

Die Matrix N bildet den zweiten Basisvektor ab auf den ersten, und den dritten auf den zweiten; alle anderen werden auf den Nullvektor abgebildet. Somit bildet N^2 den dritten Basisvektor ab auf den ersten und die restlichen Basisvektoren auf den Nullvektor, und N^3 ist die Nullmatrix. Also ist

$$e^{Nt} = E + Nt + \frac{1}{2}N^2t^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix},$$

das Produkt also

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2}e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y}(t) = e^{At}\vec{v} = \begin{pmatrix} (t^2+3t+4)e^{-2t} \\ (2t+3)e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wie verhält sich diese Lösung für $t \to \infty$?

Lösung: Da sowohl e^{-2t} als auch dessen Produkte mit beliebigen Polynomen gegen Null gehen, konvergiert der Lösungsvektor gegen den vierten Einheitsvektor des $\mathbb{R}^5$.

c) Ist dieses Verhalten stabil gegenüber kleinen Veränderungen der Anfangsbedingungen?

Lösung: Nein; ersetzt man die Null in der letzten Komponente von $\vec{v}$ durch ε, wird die fünfte Komponente der Lösung zu εe^t, was für $t \to \infty$ im Fall $\varepsilon > 0$ gegen $+\infty$ und im Fall $\varepsilon < 0$ gegen $-\infty$ geht.

Aufgabe 7: (*7 Punkte*)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{y}(t) - y(t) = t$!

Lösung: Die homogene Differentialgleichung $\ddot{y}(t) - y(t) = 0$ ist uns wohlvertraut; ihre Lösungen sind genau die sämtlichen Linearkombinationen von $\sinh t$ und $\cosh t$ oder, was auf dasselbe hinausläuft, die von e^t und e^{-t}.

Als nächstes brauchen wir mindestens eine Lösung der inhomogenen Gleichung; da rechts eine lineare Funktion steht, hat ein Ansatz der Form $y(t) = at + b$ vielleicht Aussicht auf Erfolg. Hier ist $\ddot{y}(t) = 0$ und damit $y(t) = -t$ .Die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung ist somit $y(t) = ce^t + de^{-t} - t$.

b) Berechnen Sie die Lösungskurven der Differentialgleichung $t\dot{y}(t) + y(t) = 0$ und lösen Sie, falls möglich, nach y auf!

Lösung: Man könnte diese Differentialgleichung durch Trennung der Veränderlichen lösen, etwas schneller geht es, wenn man sie als exakte Differentialgleichung erkennt: Der Vorfaktor t von $\dot{y}(t)$ wird durch partielle Ableitung nach y zum Verschwinden gebracht, genauso der restliche Term y durch partielle Ableitung nach t. Also gibt es eine Funktion $F(y,t)$, deren partielle Ableitung nach y gleich t ist und umgekehrt. Eine solche Funktion ist offensichtlich $F(y,t) = yt$; die Lösungskurven sind also die Hyperbeln $yt = C$ mit $C \in \mathbb{R}$. Auflösen nach y zu $y(t) = \frac{C}{t}$ ist hier natürlich trivial.

Aufgabe 8: (*5 Punkte*)

Finden Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 + 5x$ auf der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \le 25$!

Lösung: Wenn man $f(x,y)$ durch quadratische Ergänzung umschreibt als

$$f(x,y) = 3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + 4y^2 - \frac{25}{12},$$

sieht man wegen der Nichtnegativität reeller Quadrate sofort, daß das absolute Minimum $-\frac{25}{12}$ bei $x = -\frac{5}{6}$ und $y = 0$ angenommen wird.

Auf dem Rand ist $y^2 = 25 - x^2$, also

$$f(x, y) = 3x^2 + 100 - 4x^2 + 5x = 100 - x^2 + 5x = 100 - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}\,;$$

diese Funktion nimmt offensichtlich für $x = \frac{5}{2}$ ihr Maximum $100 + \frac{25}{4} = 106\frac{1}{4}$ an. Die beiden möglichen Werte von y sind dort $\pm\sqrt{25^2 - \frac{25}{4}} = \pm\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

Ihre lokalen Minima auf dem Rand nimmt die Funktion an, wenn $x - \frac{5}{2}$ einen möglichst großen Betrag hat; dies ist auf der Kreislinie offensichtlich bei $y = 0$ und $x = \pm 5$ der Fall, wobei $x = -5$ das absolute Minimum auf dem Rand ergibt und $x = +5$ ein lokales Zwischenminimum.

Alternativ kann man natürlich auch mit Differentialrechnung arbeiten: $\nabla f(x, y) = \binom{6x+5}{8y}$ verschwindet nur bei $x = -\frac{5}{6}$ und $y = 0$; die HESSE-Matrix $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ ist dort – wie auch sonst überall – positiv definit, also liegt dort ein Minimum.

Bei Extrema auf dem Rand muß ∇f ein Vielfaches vom Gradienten von $g(x, y) = x^2 + y^2 - 25$ sein. Da dieser gleich $\binom{2x}{2y}$ ist, führt das auf das Gleichungssystem

$$6x + 5 = 2\lambda x, \qquad 8y = 2\lambda y \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = 25\,.$$

Für $y \neq 0$ muß wegen der zweiten Gleichung $\lambda = 4$ sein; alsdann ist $6x + 5 = 8x$ oder $5 = 2x$, also $x = \frac{5}{2}$. Für $y = 0$ ist $x = \pm 5$, wir kommen also (natürlich) auf dieselben Punkte.