Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

8. März 2005

Nachklausur Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Wo ist die Funktion $f(z) = \dfrac{z}{4+z^2}$ holomorph?

2) Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{(z+1)^2}\,dz$ für den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreis mit Radius drei!

3) Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{x^5+1}\,dx$?

4) *Richtig oder falsch:* Ist A eine invertierbare symmetrische Matrix, so ist auch die inverse Matrix A^{-1} symmetrisch.

5) *Richtig oder falsch:* Die Determinante der 5×5-Matrix A mit $a_{k\ell} = (k+\ell) + i(k-\ell)$ ist reell.

6) Welche Nullstellen hat das Polynom $f(x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 8x - 12$?

7) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot y(t) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y(t)}$ mit $y(0) = 0$ hat genau eine Lösung.

Aufgabe 1: (*6 Punkte*)

Berechnen Sie $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{12x^2}{x^4+5x^2+4}\,dx$!

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)

Sei $f(t) = 1 - t^2$ für $0 \le t < 1$, periodisch fortgesetzt mit Periode eins.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-2,2]$!

b) Ist f gerade, ungerade oder keins von beiden?

c) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f!

d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie sonst?

e) Für welche $t \in \mathbb{R}$ tritt das Gibbs-Phänomen auf?

Aufgabe 3: (*3 Punkte*)

Berechnen Sie die Ableitung im Distributionensinn der Funktion f aus Aufgabe 2!

Aufgabe 4: (*6 Punkte*)

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $f_c(t) = c^2 - t^2$ für $|t| \le c$ und Null sonst in reeller Form!

b) *Ditto* für $g(t) = \dfrac{\sin t}{t^3} - \dfrac{\cos t}{t^2}$!

c) Was ist die Fourier-Transformierte von $f_1 * g$?

Aufgabe 5: (*7 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt Δ?

d) Läßt sich auch eine Orthonormalbasis finden, bezüglich derer A Dreiecksgestalt hat?

e) Berechnen Sie die Matrizen $e^{\Delta t}$ und e^{At}! *Hinweis:* Was wissen Sie über Matrizen, deren Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis bilden? Was gilt bei Orthogonalbasen?

Aufgabe 6: (*4 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ mit den Anfangsbedingungen $\vec{y}(0) = \vec{v}$ für

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wie verhält sich diese Lösung für $t \to \infty$?

c) Ist dieses Verhalten stabil gegenüber kleinen Veränderungen der Anfangsbedingungen?

Aufgabe 7: (*7 Punkte*)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{y}(t) - y(t) = t$!

b) Berechnen Sie die Lösungskurven der Differentialgleichung $t\dot{y}(t) + y(t) = 0$ und lösen Sie, falls möglich, nach y auf!

Aufgabe 8: (*5 Punkte*)

Finden Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 + 5x$ auf der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \le 25$!

Formelanhang

$$\int t^2 \cos\omega t = \frac{(\omega t)^2 - 2}{\omega^3} \sin\omega t + \frac{2t}{\omega^2}\cos\omega t\,, \quad \int t^2 \sin\omega t = \frac{2 - (\omega t)^2}{\omega^3}\cos\omega t + \frac{2t}{\omega^2}\sin\omega t\,,$$

$$\int t^2 e^{at}\,dt = \frac{(at)^2 - 2at + 2}{a^3} e^{at}\,, \qquad \mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}\,,$$

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \mathcal{L}\{\cosh at\}(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}, \qquad \mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2},$$

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \qquad \mathcal{L}\{\sinh at\}(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}, \qquad \mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Dienstag, dem 8. März 2005, um 13^{00} Uhr