WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

24. März 2005

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* $f(z) = \sin(\Im\mathrm{m}\, z)$ ist holomorph.

2) Was ist $\int_\gamma z^2\, dz$ für $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = it$?

3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ mit $a_{ij} = \begin{cases} j - i + 1 & \text{für } j > i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist diagonalisierbar.

4) Bestimmen Sie die FOURIER-Reihe von $f(t) = \sin^4 t + \cos^4 t$!

5) *Richtig oder falsch:* Falls die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ist, kann das Differentialgleichungssystem $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ keine nichtkonstante periodische Lösung haben.

6) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 2\sqrt{y(t)}$ mit $y(0) = 1$ ist eindeutig lösbar.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*
Für reelles $a > 0$ sei $f_a(z) = \dfrac{2a}{z^2 + a^2}$ und $g_a(z) = \dfrac{2z}{z^2 + a^2}$.

a) Berechnen Sie die Residuen von f_a und g_a an den Polstellen!

b) Berechnen Sie, falls existent, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_a(x)\, dx$ und $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_a(x)\, dx$!

c) *Ditto* für die Limites $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f_a(x)\, dx$ und $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} g_a(x)\, dx$!

Aufgabe 2: *(7 Punkte)*
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode 2π, und für $|t| \le \pi$ sei

$$f(t) = \begin{cases} 3 & \text{für } |t| \le \pi/4 \\ 2 & \text{für } \pi/4 < |t| \le \pi/2 \\ 1 & \text{für } \pi/2 < |t| \le 3\pi/4 \\ 0 & \text{für } 3\pi/4 < |t| \le \pi \end{cases}.$$

a) Skizzieren Sie die Funktion f über dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$!

b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f !
(Hinweis: Zeigen Sie, daß für gerade k *gilt:* $\sin k\pi/4 + \sin 3k\pi/4 = 0$ *!)*

d) Wo tritt bei der Konvergenz dieser FOURIER-Reihe das GIBBS-Phänomen auf, und wohin konvergiert die Reihe an diesen Punkten?

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Funktion $g(t) = \begin{cases} 3 & \text{für } |t| \le \pi/4 \\ 2 & \text{für } \pi/4 < |t| \le \pi/2 \\ 1 & \text{für } \pi/2 < |t| \le 3\pi/4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und geben Sie diese in rein reeller Form an!

b) Zeigen Sie: Die Faltung $g(t) * \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-2k\pi)$ ist gleich der Funktion f aus Aufgabe 2!

c) Existiert die FOURIER-Transformierte dieser Faltung als L^2-Funktion?

Aufgabe 4: (*9 Punkte*)

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt?

d) Was ist e^{At} für $t \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 5: (*5 Punkte*)

a) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = y(t) - x(t), \quad \dot{y}(t) = z(t) - y(t), \quad \dot{z}(t) = -z(t) \quad \text{mit} \quad x(0) = y(0) = z(0) = 1\,!$$

b) Wir verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

c) Sind diese Lösungen stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Aufgabe 6: (*6 Punkte*)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 5y(t) = 1 - 5t$!

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

$\mathcal{H}\ \mathcal{I}\ \mathcal{L}\ \mathcal{F}\ \mathcal{S}\ \mathcal{M}\ \mathcal{I}\ \mathcal{T}\ \mathcal{T}\ \mathcal{E}\ \mathcal{L}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

$\mathcal{H}\ \mathcal{I}\ \mathcal{N}\ \mathcal{W}\ \mathcal{E}\ \mathcal{I}\ \mathcal{S}\ \mathcal{E}$

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \qquad \mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \qquad \mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{für } n \ge 0$$

$$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sin(3\pi/4) = \cos(7\pi/4) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\cos(3\pi/4) = \sin(5\pi/4) = \cos(5\pi/4) = \sin(7\pi/4) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.

Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •