WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

30. März 2005

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Menge M aller Vektoren aus $\mathbb{F}_2^5$, deren Komponenten die Summe Null haben, ist ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum.

Lösung: *Richtig:* Die Abbildung, die jedem Vektor aus $\mathbb{F}_2^5$ die Summe seiner Komponenten zuordnet, ist linear, und damit ist M als Kern davon ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum.

2) Richtig oder falsch: Für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei $A^2 = E$ die Einheitsmatrix. Dann ist $A = E$ oder $A = -E$.

Lösung: *Falsch,* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sind nur zwei von recht vielen Gegenbeispielen.

3) In der 10×10-Matrix A sei $a_{ij} = ij$. Was ist $\det A$?

Lösung: Die j-te Spalte von A ist das j-fache der ersten Spalte; die Matrix hat also nur Rang eins, und damit ist insbesondere $\det A = 0$.

4) Richtig oder falsch: Betrachtet man $\mathbb{C}$ als reellen Vektorraum, so definiert die komplexe Konjugation eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Lösung: *Richtig,* denn für reelle λ, μ und $z, w \in \mathbb{C}$ ist

$$\overline{\lambda z + \mu w} = \overline{\lambda z} + \overline{\mu w} = \overline{\lambda}\,\overline{z} + \overline{\mu}\,\overline{w} = \lambda\overline{z} + \mu\overline{w}\,.$$

5) Finden Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \\ 5i \end{pmatrix}$ aufgespannten Unterraums von $\mathbb{C}^3$!

Lösung: $\vec{v}_1$ ist bereits ein Vektor der Länge eins und kann damit direkt für die gesuchte Orthonormalbasis übernommen werden; allerdings könnte man auch aus ästhetischen Gründen stattdessen den zweiten Einheitsvektor nehmen, der auch den Vorteil hätte, rechnerisch angenehmer zu sein. Das Produkt $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = i \cdot (-5i) = 5$ muß hier eigentlich gar nicht ausgerechnet werden, denn man sieht auch so, daß $\vec{w} = \vec{v}_2 - 5\vec{v}_1$ orthogonal zu $\vec{v}_1$ ist. Die Länge von $\vec{w}$ ist $\sqrt{|3i|^2 + |4|^2} = \sqrt{25} = 5$; damit bilden

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{5}\vec{w} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3i \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die gesuchte Orthonormalbasis.

6) Die reelle Zahl a sei positiv. Was ist $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{dx}{x^2}$?

Lösung: Da der Integrand an der Stelle $x = 0$ nicht definiert ist, existiert das Integral nicht (auch kein CAUCHYscher Hauptwert). Der durch stures Einsetzen in eine Stammfunktion entstehende Wert $-2/a$ ist schon deshalb unsinnig, weil ein Integral über eine positive Funktion nicht negativ sein kann.

7) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom dritten Grades von $f(x, y) = e^{xy}$ um $(0, 0)$!

Lösung: $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, also ist $e^{xy} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xy)^n}{n!}$. Da $(xy)^n$ den Grad $2n$ hat, ist das gesuchte Polynom einfach $1 + xy$.

8) Was ist $\iint\limits_K \cos x \, dx \, dy$ für $K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \le \frac{\pi}{2}, |y| \le 1\right\}$?

Lösung: K ist das Rechteck mit Ecken $(\pm\frac{\pi}{2}, \pm 1)$ und damit insbesondere ein Normalbereich; somit ist

$$\iint\limits_K \cos x \, dx \, dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \, dx \right) dy = \int_{-1}^{1} \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) dy = \int_{-1}^{1} 2 \, dy = 4 \, .$$

Aufgabe 1: *(9 Punkte)*

M sei die Menge aller Funktionen der Form $f(x) = ae^{3x} + be^{2x} + ce^x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, und V sei der von M in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ erzeugte Untervektorraum.

a) Ist $V = M$, d.h. ist M bereits ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

Lösung: *Ja,* denn offensichtlich ist jede Linearkombination von Linearkombinationen der Funktionen $1, e^x, e^{2x}$ und e^{3x} wieder eine Linearkombination dieser Funktionen.

b) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V!

Lösung: Die Funktionen $1, e^x, e^{2x}$ und e^{3x} bilden offensichtlich ein Erzeugendensystem. Sie sind auch linear unabhängig, denn ist

$$\lambda + \mu e^x + \nu e^{2x} + \rho e^{3x} \equiv 0 \, ,$$

so hat das Polynom $\lambda + \mu z + \nu z^2 + \rho z^3$ alle positiven reellen Zahlen als Nullstellen, muß also das Nullpolynom sein, so daß $\lambda = \mu = \nu = \rho = 0$ ist.

c) Zeigen Sie: $\varphi_\lambda\colon \begin{cases} V \to V \\ f(x) \mapsto f''(x) + \lambda f(x) \end{cases}$ ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung.

Lösung: Klar, denn sowohl das Differenzieren als auch die Multiplikation mit einem Skalar sind lineare Operationen, und damit auch die Summe der beiden Operationen. Ausführlich und formal: Für $f, g \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(\alpha f + \beta g) &= (\alpha f + \beta g)' + \lambda \cdot (\alpha f + \beta g) = \alpha f' + \beta g' + \lambda\alpha f + \lambda\beta g \\ &= \alpha(f' + \lambda f) + \beta(g'(x) + \lambda g) = \alpha\varphi_\lambda(f) + \beta\varphi_\lambda(g) \, . \end{aligned}$$

d) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist φ_λ injektiv, für welche surjektiv?

Lösung: $\varphi_\lambda(ae^{3x}+be^{2x}+ce^x+d)=(3a+\lambda)e^{3x}+(2b+\lambda)e^{2x}+(a+\lambda)e^x+\lambda d$ kann nur dann verschwinden, wenn $3a+\lambda a=2b+\lambda b=c+\lambda c=\lambda d=0$, d.h. $(3+\lambda)a=(2+\lambda)b=(1+\lambda)c=\lambda d=0$. Falls dies gilt ohne daß a,b,c und d simultan verschwinden, muß der Vorfaktor jedes nichtverschwindenden Koeffizienten Null sein, d.h. φ_λ ist nicht injektiv für $\lambda\in\{0,-1,-2,-3\}$. Der Kern besteht dann jeweils aus allen Vielfachen von $1, e^x, e^{2x}$ *bzw.* e^{3x}, ist also insbesondere eindimensional.

Da φ_λ einen endlichdimensionalen Vektorraum auf sich selbst abbildet, ist φ_λ nach der Dimensionsformel genau dann surjektiv, wenn es injektiv ist, also für alle $\lambda\notin\{0,-1,-2,-3\}$.

e) Welche Dimensionen haben Kern φ_λ und Bild φ_λ in den Fällen, in denen φ_λ nicht injektiv ist?

Lösung: Wie wir gerade gesehen haben, hat der Kern dann die Dimension eins und nach der Dimensionsformel ist $\dim \text{Bild}\,\varphi_\lambda=\dim V-\dim \text{Kern}\,\varphi_\lambda=4-1=3$.

f) Welche Abbildungsmatrix hat $\psi\colon \begin{cases} V\to V \\ f\mapsto e^{-x}f'(x)+f(x)\end{cases}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$?

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren; wir müssen also diese Bilder berechnen:

$$\begin{aligned}\psi(1)&=e^{-x}\cdot 0+1=1\\ \psi(e^x)&=e^{-x}\cdot e^x+e^x=1+e^x\\ \psi(e^{2x})&=e^{-x}\cdot 2e^{2x}+e^{2x}=2e^x+e^{2x}\\ \psi(e^{3x})&=e^{-x}\cdot 3e^{3x}+e^{3x}=3e^{2x}+e^{3x}\end{aligned}$$

Die Abbildungsmatrix ist somit gleich $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

g) Ist diese Abbildungsmatrix invertierbar?

Lösung: Ja, denn als obere Dreiecksmatrix mit Einsen in der Hauptdiagonalen hat sie Determinante eins.

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x+\quad ay+\quad z&=5 &(1)\\ x+(a+1)y+(2-a)z&=7 &(2)\\ ay+(a-1)z&=3a+1 &(3)\end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a\in\mathbb{R}$!

Lösung: In Gleichung (3) kommt x gleich gar nicht erst vor; um es aus Gleichung (2) zu eliminieren, subtrahieren wir Gleichung (1) und erhalten

$$\begin{aligned} y+(1-a)z&=2\\ ay+(a-1)z&=3a+1\end{aligned}$$

Stur nach Schema F würden wir nun das a-fache der ersten dieser Gleichungen von der zweiten subtrahieren, was auf

$$(a-1-a+a^2)z=a+1 \quad\text{oder}\quad (a^2-1)z=a+1$$

führt. Für $a = -1$ steht hier $0z = 0$, d.h. es gibt keine Bedingung an z; für $a \neq -1$ können wir durch $a + 1$ kürzen und erhalten die einfachere Gleichung $(a - 1)z = 1$. Diese ist für $a = 1$ unlösbar, ansonsten ist $z = 1/(a - 1)$. Dies eingesetzt in $y + (1 - a)z = 2$ führt auf $y = 3$ im Falle $a \neq \pm 1$. Für $a = -1$ ist z beliebig und die Gleichung $y + (1 - a)z = 2$ wird $y + 2z = 2$, d.h. hier ist $y = 2 - 2z$.

Alternativ hätten wir im obigen System aus zwei Gleichungen auch einfach beide addieren können, um z zu eliminieren; dies hätte auf $(a + 1)y = 3a + 3$ geführt. Für $a \neq -1$ ist dies äquivalent zu $y = 3$; für $a = -1$ ist y beliebig. Zur Berechnung von z können wir dann die Gleichung $y + (1 - a)z = 2$ nach z auflösen, was genau für $a \neq 1$ möglich ist. Für $a \neq \pm 1$ erhalten wir wieder $z = 1/(a - 1)$, für $a = -1$ ist $z = (2 - y)/(1 - a)$, und für $a = 1$ ist das LGS unlösbar.

x läßt sich nun leicht aus Gleichung eins bestimmen; das Endergebnis ist

$$\mathcal{L}_a = \begin{cases} \left\{\left(5 - 3a - \frac{1}{a-1}, 3, \frac{1}{a-1}\right)\right\} & \text{für } a \neq \pm 1 \\ \left\{(7 - 3\lambda, 2 - 2\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{für } a = -1 \\ \emptyset & \text{für } a = +1 \end{cases} .$$

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)
Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$!

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 5 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda\big((3-\lambda)(4-\lambda) - 20\big) = -\lambda(\lambda^2 - 7\lambda - 8) . \end{aligned}$$

Nach VIÈTE oder einer Lösungsformel für quadratische Gleichungen folgt leicht, daß der Ausdruck in der Klammer für $\lambda = -1$ und $\lambda = 8$ verschwindet; die Eigenwerte sind also 0, -1 und 8.

Auch ohne Rechnung ist klar, daß der Koordinateneinheitsvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert Null ist. Weiter ist $A + E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, so daß $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ den Eigenraum für $\lambda_2 = -1$ aufspannt, und $A - 8E = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 0 & -8 & 0 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, so daß $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ den Eigenraum für $\lambda_3 = 5$ aufspannt.

Aufgabe 4: (*6 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$!

Lösung: Der erste Spaltenvektor $\binom{3}{4}$ von M hat die Länge $\sqrt{3^2 + 4^2} = 4$, als ersten Vektor einer Orthonormalbasis des von den Spalten aufgespannten Untervektorraums können wir also $\vec{q}_1 = \frac{1}{5}\binom{3}{4}$ nehmen.

Der zweite Spaltenvektor $\binom{4}{-3}$ steht offensichtlich senkrecht auf dem ersten; wir können also ganz auf den Orthogonalisierungsschritt nach GRAM-SCHMIDT verzichten und gleich $\vec{q}_2 = \frac{1}{5}\binom{4}{-3}$ nehmen.

Der dritte Spaltenvektor $\binom{-5}{5}$ muß, da wir in einem zweidimensionalen Vektorraum sind, als Linearkombination dieser beiden darstellbar sein. Da $\vec{q}_1$ und $\vec{q}_2$ eine Orthonormalbasis bilden, erhalten wir die Koeffizienten einfach durch Skalarmultiplikation:

$$\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}\vec{q}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \frac{-15+20}{5} = -1 \text{ und } \begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}\vec{q}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \frac{-20-15}{5} = 7\,,$$

also ist

$$\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix} = -\vec{q}_1 + 7\vec{q}_2 \quad \text{und} \quad M = QR \quad \text{mit} \quad Q = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\4 & 3\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix}5 & 0 & -1\\0 & 5 & 7\end{pmatrix}.$$

b) Gegeben seien hundert Paare von Meßgrößen (t_i, x_i), zwischen denen ein Zusammenhang der Form $x_i = a\cos t_i + b\sin t_i$ vermutet wird. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf zur Berechnung jener Koeffizienten a, b, mit denen diese Beziehung im Sinne der kleinsten Quadrate am besten gilt!

Lösung: Falls der Zusammenhang perfekt wäre, würden die gesuchten Paramter a und b den hundert linearen Gleichungen

$$\cos t_i \cdot a + \sin t_i \cdot b = x_i$$

genügen; in Matrixform ist dies das LGS

$$A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \vec{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix}\cos t_1 & \sin t_1\\ \vdots & \vdots \\ \cos t_{100} & \sin t_{100}\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_{100}\end{pmatrix}.$$

Dieses LGS für a und b wird praktisch immer unlösbar sein; die im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate beste Schätzung erhält man, indem man mit der adjungierten, d.h. hier im Reellen einfach der transponierten Matrix von A multipliziert: $({}^tAA)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = {}^tA\vec{x}$. Ausgeschrieben wird das zu

$$\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{100}\cos^2 t_i & \sum_{i=1}^{100}\cos t_i \sin t_i\\ \sum_{i=1}^{100}\cos t_i\sin t_i & \sum_{i=1}^{100}\sin^2 t_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{100} x_i\cos t_i\\ \sum_{i=1}^{100} x_i \sin t_i\,.\end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\\ (x,y) \mapsto \sin xy + xe^y + (x+y)^2 \end{cases}!$$

Lösung: Da die Funktion beliebig oft stetig differenzierbar ist, also insbesondere zweimal, genügt es, die partiellen Ableitungen zu berechnen; außerdem können wir das Lemma von SCHWARZ anwenden, wonach $f_{xy} = f_{yx}$ ist. Wegen

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= y\cos xy + e^y + 2(x+y)\\
f_y(x,y) &= x\cos xy + xe^y + 2(x+y)\\
f_{xx}(x,y) &= -y^2\sin xy + 2\\
f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= \cos xy - xy\sin xy + e^y + 2\\
f_{yy}(x,y) &= -x^2\sin xy + xe^y + 2
\end{aligned}$$

ist somit $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos xy + e^y + 2(x+y) \\ x\cos xy + xe^y + 2(x+y) \end{pmatrix}$ und

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -y^2 \sin xy + 2 & \cos xy - xy\sin xy + e^y + 2 \\ \cos xy - xy\sin xy + e^y + 2 & -x^2\sin xy + xe^y + 2 \end{pmatrix} .$$

b) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{y}{x^2+1} \\ \dfrac{x}{y^2+1} \end{pmatrix} \end{cases} !$$

Lösung: Die erste Komponente $\dfrac{y}{x^2+1}$ von $\vec{V}$ hat die partiellen Ableitungen

$$\frac{-2xy}{(x^2+1)^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{x^2+1} ;$$

für die zweite Komponente $\dfrac{x}{y^2+1}$ erhalten wir entsprechend

$$\frac{1}{y^2+1} \quad \text{und} \quad \frac{-2xy}{(y^2+1)^2} .$$

Also ist

$$J_{\vec{V}}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-2xy}{(x^2+1)^2} & \dfrac{1}{x^2+1} \\ \dfrac{1}{y^2+1} & \dfrac{-2xy}{(y^2+1)^2} \end{pmatrix} .$$

Die Divergenz von $\vec{V}$ ist die Summe der Diagonalelemente der JACOBI-Matrix, also

$$\operatorname{div} \vec{V}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+1)^2} - \frac{2xy}{(y^2+1)^2} .$$