Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515

A5, C201

*30. März 2005*

# Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

**Fragen:** *(je* **zwei** *Punkte)*
*Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine* kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

*1)* *Richtig oder falsch:* Die Menge $M$ aller Vektoren aus $\mathbb{F}_2^5$, deren Komponenten die Summe Null haben, ist ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum.

*2)* *Richtig oder falsch:* Für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei $A^2 = E$ die Einheitsmatrix. Dann ist $A = E$ oder $A = -E$.

*3)* In der $10 \times 10$-Matrix $A$ sei $a_{ij} = ij$. Was ist $\det A$?

*4)* *Richtig oder falsch:* Betrachtet man $\mathbb{C}$ als reellen Vektorraum, so definiert die komplexe Konjugation eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

*5)* Finden Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \\ 5i \end{pmatrix}$ aufgespannten Unterraums von $\mathbb{C}^3$!

*6)* Die reelle Zahl $a$ sei positiv. Was ist $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{dx}{x^2}$?

*7)* Bestimmen Sie das Taylor-Polynom dritten Grades von $f(x, y) = e^{xy}$ um $(0, 0)$!

*8)* Was ist $\iint\limits_K \cos x \, dx \, dy$ für $K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \le \frac{\pi}{2}, |y| \le 1\right\}$?

**Aufgabe 1:** (*9 Punkte)*
$M$ sei die Menge aller Funktionen der Form $f(x) = ae^{3x} + be^{2x} + ce^x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, und $V$ sei der von $M$ in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ erzeugte Untervektorraum.

*a)* Ist $V = M$, d.h. ist $M$ bereits ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

*b)* Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $V$!

*c)* Zeigen Sie: $\varphi_\lambda\colon \begin{cases} V \to V \\ f(x) \mapsto f''(x) + \lambda f(x) \end{cases}$ ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung.

*d)* Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\varphi_\lambda$ injektiv, für welche surjektiv?

*e)* Welche Dimensionen haben Kern $\varphi_\lambda$ und Bild $\varphi_\lambda$ in den Fällen, in denen $\varphi_\lambda$ nicht injektiv ist?

*f)* Welche Abbildungsmatrix hat $\psi\colon \begin{cases} V \to V \\ f \mapsto e^{-x}f'(x) + f(x) \end{cases}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$?

*g)* Ist diese Abbildungsmatrix invertierbar?

**Aufgabe 2:** *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + \quad ay + \quad z &= 5 & (1)\\ x + (a+1)y + (2-a)z &= 7 & (2)\\ ay + (a-1)z &= 3a+1 & (3) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$!

**Aufgabe 3:** *(5 Punkte)*
Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ !

**Aufgabe 4:** *(6 Punkte)*

*a)* Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ !

*b)* Gegeben seien hundert Paare von Meßgrößen $(t_i, x_i)$, zwischen denen ein Zusammenhang der Form $x_i = a\cos t_i + b\sin t_i$ vermutet wird. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf zur Berechnung jener Koeffizienten $a, b$, mit denen diese Beziehung im Sinne der kleinsten Quadrate am besten gilt!

**Aufgabe 5:** *(6 Punkte)*

*a)* Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin xy + xe^y + (x+y)^2 \end{cases} !$$

*b)* Berechnen Sie die JACOBI-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{y}{x^2+1} \\ \dfrac{x}{y^2+1} \end{pmatrix} \end{cases} !$$

## $\mathcal{H}\ \mathcal{I}\ \mathcal{L}\ \mathcal{F}\ \mathcal{S}\ \mathcal{M}\ \mathcal{I}\ \mathcal{T}\ \mathcal{T}\ \mathcal{E}\ \mathcal{L}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.
Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

**Abgabe** bis zum Mittwoch, dem 30. März 2005, um $10^{15}$ Uhr

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •