Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

12. Februar 2005

Scheinklausur Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* $f(z) = \dfrac{z}{4 - z\overline{z}}$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 2$ holomorph.

Lösung: *Falsch,* denn sonst wäre auch $|z|^2 = z\overline{z} = 4 - \dfrac{z}{f(z)}$ dort holomorph.

2) Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \frac{4z^3 + 9z^2 + 4z + 1}{z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z + 4321}\,dz$ für den im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Einheitskreis!

Lösung: Da der Zähler des Integranden die Ableitung des Nenners ist, hat der Integrand die Stammfunktion $\ln(z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z + 4321)$. Für z auf dem Einheitskreis ist der Realteil jeder z-Potenz mindestens -1, das Argument des Logarithmus kann also keine negative reelle Zahl sein. Somit haben wir eine auf der geschlossenen Kurve γ holomorphe Stammfunktion, d.h. das Integral verschwindet.

3) Was ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6}{x^4 + 1}\,dx$?

Lösung: Wegen $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^6}{x^4 + 1} = \infty$ divergiert das Integral.

4) *Richtig oder falsch:* Ist A eine invertierbare Hermitesche Matrix, so ist auch die inverse Matrix A^{-1} Hermitesch.

Lösung: *Richtig:* A ist genau dann Hermitesch, wenn ${}^tA = \overline{A}$ ist. Ist B die inverse Matrix zu A, so ist ${}^tB\,{}^tA = {}^t(AB) = {}^tE = E$ und ${}^tA\,{}^tB = {}^t(BA) = {}^tE = E$, also ist ${}^tB = ({}^tA)^{-1}$. Da außerdem $\left(\overline{A}\right)^{-1} = \overline{A^{-1}}$ ist, folgt ${}^tB = ({}^tA)^{-1} = (\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}} = \overline{B}$, wie behauptet.

5) Der vierte Einheitsvektor sei Hauptvektor vierter Stufe der Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ zum Eigenwert i. Was ist $\det A$?

Lösung: Wenn es einen Hauptvektor vierter Stufe gibt, muß der Hauptraum zu i mindestens die Dimension vier haben; da wir in $\mathbb{C}^4$ sind, ist somit i der einzige Eigenwert und hat die algebraische Vielfachheit vier. Daher ist $\det A = i^4 = 1$.

6) Welche Nullstellen hat das Polynom $f(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4$?

Lösung: Das Produkt aller Nullstellen ist -4 und ihre Summe -1; *falls* alle Nullstellen ganzzahlig sein sollten, kämen nur $\pm1, \pm2$ und ±4 in Frage. In der Tat verschwindet f für die vier Werte ± 1 und ± 2. Da deren Produkt gleich vier, das der Nullstellen aber -4 ist muß -1 doppelte Nullstelle sein.

7) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 5 \arctan y(t)$ mit $y(e) = \pi$ hat genau eine Lösung.

Lösung: *Richtig,* denn die Ableitung $\frac{5}{1+y^2}$ von $5 \arctan y$ nach y ist beschränkt, so daß die rechte Seite eine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt und wir den Satz von PICARD-LINDELÖF anwenden können.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Berechnen Sie $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{8x^2}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}\,dx$!

Lösung: Bei Integralen einer solchen Bauart führt meist der Umweg über die komplexen Zahlen am schnellsten zu Erfolg. Wie im Komplexen üblich, benennen wir die Variable um in z, schreiben den Integranden also in der Form

$$f(z) = \frac{8z^2}{(z^2+2z+2)(z^2-2z+2)} .$$

Wir müssen zunächst die Pole von f bestimmen:
Die Nullstellen des Nenners lassen sich durch quadratische Ergänzung oder nach einer der Lösungsformeln für quadratische Gleichungen leicht bestimmen:

$$z^2 \pm 2z + 2 = (z \pm 1)^2 + 1 = 0 \iff z = \mp 1 + i \quad \text{oder} \quad z = \mp 1 - i .$$

Da der Zähler für keine dieser vier Zahlen verschwindet, sind sie allesamt Polstellen von f.
Der Integrationsweg γ_R sei der Halbkreis um den Nullpunkt vom Punkt R durch die obere Halbebene zum Punkt $-R$; in Formeln also $\gamma_R\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto Re^{it}$.
δ_R sei der Integrationsweg, der mit γ_R beginnt und dann entlang der reellen Achse von $-R$ nach R geht. Damit ist δ_R eine geschlossene Kurve, und Integrale entlang δ_R können nach dem Residuensatz berechnet werden.
Für $R > \sqrt{2}$ liegen im Innern des von δ_R berandeten Halbkreises die beide Pole $z_1 = 1+i$ und $z_2 = -1+i$. Beide sind Pole erster Ordnung, d.h. $\operatorname{Res}_{z=z_\nu} f(z) = \lim_{z\to z_\nu} (z-z_\nu) f(z)$.

Damit ist $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z\to z_1} (z-1-i)f(z) = \lim_{z\to 1+i} \frac{8z^2}{(z^2+2z+2)(z-1+i)}$

$$= \frac{8(1+i)^2}{\big((1+i)^2+2+2i+2\big)(1+i-1+i)} = \frac{8\cdot 2i}{(4+4i)\cdot 2i} = \frac{8}{4+4i} = \frac{2}{1+i} = 1-i .$$

und genauso $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \lim_{z\to z_2} (z+1-i)f(z) = \lim_{z\to -1+i} \frac{8z^2}{(z+1+i)(z^2-2z+2)}$

$$= \frac{8(-1+i)^2}{(-1+i+1+i)\big((-1+i)^2+2-2i+2\big)} = \frac{-8\cdot 2i}{2i\cdot(4-4i)} = \frac{-8}{4-4i} = \frac{-2}{1-i} = -1-i .$$

Nach dem Residuensatz ist daher

$$\int\limits_{\delta_R} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=1+i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-1+i} f(z) \right) = 2\pi i \big((1-i) + (-1-i) \big) = 4\pi .$$

Das ist auch der Wert des gesuchten Integrals, denn da der Grad des Zähler um zwei kleiner ist als der des Nenners, verschwindet das Integral über γ_R für $R \to \infty$, d.h.

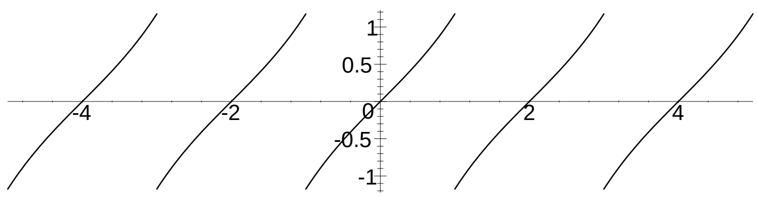
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\delta_R} f(z)\,dz = 4\pi\,.$$

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

Sei $f(t) = \sinh t$ für $-1 < t \le 1$, periodisch fortgesetzt mit Periode zwei.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-5, 5]$!

Lösung: $\sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t^k}{k!} - \frac{(-t)^k}{k!}\right) = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 - \cdots$ ist für $|t| \le 1$ fast gleich t, das Bild sieht also fast wie eine Sägezahlkurve aus:



b) Ist f gerade, ungerade oder keins von beiden?

Lösung: Da das Intervall $[-1, 1]$, in dem f explizit vorgegeben ist, symmetrisch zum Nullpunkt liegt und $\sinh t$ eine ungerade Funktion ist, ist auch f ungerade.

c) Berechnen Sie die reelle FOURIER-Reihe von f!

Lösung: Da f eine ungerade Funktion ist, gibt es nur Sinusterme. Zu Ihrer Berechnung integrieren wir am besten über das Periodenintervall $[-1, 1]$, in dem f einfach der Cosinus hyperbolicus ist. Die zur Periode zwei gehörige Grundfrequenz ist $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$, also ist

$$b_\ell = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\sin \ell\pi t\,dt = \int_{-1}^{1} \sinh t \sin \ell\pi t\,dt\,.$$

Dieses Integral kann man entweder via (zweifache) partielle Integration ausrechnen oder aber auf dem Umweg über Exponentialfunktionen:

$$\sinh t \sin \ell\pi t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^{\ell\pi i t} - e^{-\ell\pi i t}}{2i} = \frac{e^{(1+\ell\pi i)t} + e^{-(1+\ell\pi i)t} - e^{(1-\ell\pi i)t} - e^{-(1-\ell\pi i)t}}{4i}$$

hat die Stammfunktion

$$\begin{aligned} &\frac{e^{(1+\ell\pi i)t} - e^{-(1+\ell\pi i)t}}{4i(1+\ell\pi i)} - \frac{e^{(1-\ell\pi i)t} - e^{-(1-\ell\pi i)t}}{4i(1-\ell\pi i)} \\ &= \frac{e^{(1+\ell\pi i)t} - e^{-(1+\ell\pi i)t}}{4(i-\ell\pi)} - \frac{e^{(1-\ell\pi i)t} - e^{-(1-\ell\pi i)t}}{4(i+\ell\pi)}\,, \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned} b_\ell &= \left.\frac{e^{(1+\ell\pi i)t} - e^{-(1+\ell\pi i)t}}{4(i-\ell\pi i)}\right|_{-1}^{1} - \left.\frac{e^{(1-\ell\pi i)t} - e^{-(1-\ell\pi i)t}}{4(i+\ell\pi)}\right|_{-1}^{1} \\ &= \frac{e^{1+\ell\pi i} - e^{-(1+\ell\pi i)}}{2(i-\ell\pi)} - \frac{e^{1-\ell\pi i} - e^{-(1-\ell\pi i)}}{2(i+\ell\pi)}\,. \end{aligned}$$

Da $e^{\ell\pi i} = (-1)^\ell = e^{-\ell\pi i}$ ist, vereinfacht sich dies zu

$$\begin{aligned} b_\ell &= (-1)^\ell \frac{e-e^{-1}}{2(i-\ell\pi)} - (-1)^\ell \frac{e-e^{-1}}{2(i+\ell\pi)} = (-1)^\ell \frac{(e-e^{-1})(i-\ell\pi)-(e-e^{-1})(i+\ell\pi)}{2(-1-\ell^2\pi^2)} \\ &= (-1)^{\ell+1} \frac{\ell\pi}{1+\ell^2\pi^2}(e-e^{-1}) \,. \end{aligned}$$

Die FOURIER-Reihe von f ist daher $(e-e^{-1}) \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\pi\ell}{1+\ell^2\pi^2} \sin \pi\ell t$.

d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie sonst?

Lösung: Die FOURIER-Reihe konvergiert zumindest überall dort gegen $f(t)$, wo f stetig ist, also überall außer bei den ungeraden ganzen Zahlen. Dort haben wir jeweils von der einen Seite her Grenzwert $\sinh(1)$ und von der anderen Grenzwert $\sinh(-1)$; da sinh eine ungerade Funktion ist, sind diese beiden entgegengesetzt gleich. Somit konvergiert die Reihe gegen Null, den Mittelwert der beiden Limites.

e) Für welche $t \in \mathbb{R}$ tritt das GIBBS-Phänomen auf?

Lösung: Nur für die in *d)* bestimmten Sprungstellen, also die ungeraden ganzen Zahlen.

Aufgabe 3: (*3 Punkte*)
Berechnen Sie die Ableitung im Distributionensinn der Funktion f aus Aufgabe 2!

Lösung: Wir wissen, daß die Ableitung im Distributionensinn überall dort, wo die Funktion differenzierbar ist, mit der Ableitung selbst übereinstimmt, während jede Sprungstelle a einen Term $\big(f(a^+)-f(a^-)\big)\cdot\delta(t-a)$ liefert. Für die obige Funktion f führt dies auf $\dot{T}_f(\varphi) = T_{\cosh}(\varphi) + 2\sinh(1) \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(2k+1)$, und als „Funktion" geschrieben ist die Ableitung gleich $\dot{f}(t) = \cosh t + 2\sinh(1) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\big(t-(2k+1)\big)$.

Aufgabe 4: (*6 Punkte*)

a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von $f(t) = e^{-a|t|}$ für $a > 0$ in reeller Form!

Lösung: $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at-i\omega t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at-i\omega t}\,dt$

$$= \frac{e^{at-i\omega t}}{a-i\omega}\Bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-at-i\omega t}}{a+i\omega}\Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{(a+i\omega)+(a-i\omega)}{a^2+\omega^2} = \frac{2a}{a^2+\omega^2} \,.$$

b) *Ditto* für $g(t) = \dfrac{1}{a^2+t^2}$!

Lösung: $2ag(\omega)$ ist, wie gerade gesehen haben, die FOURIER-Transformierte von $f(t)$, also ist $g(\omega)$ die FOURIER-Transformierte von $\frac{f(t)}{2a}$. Die inverse FOURIER-Transformierte von $g(t)$ ist also $\frac{f(\omega)}{2a}$, und damit ist $\widehat{g}(\omega) = 2\pi\breve{g}(-\omega) = \frac{2\pi f(-\omega)}{2a} = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$.

c) Was ist $g * g$?

Lösung: Die FOURIER-Transformierte von $g * g$ ist

$$\widehat{g*g}(\omega) = \widehat{g}(\omega)^2 = \frac{\pi^2}{a^2} e^{-2a|\omega|} = \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{\pi}{2a} e^{-2a|\omega|} \Longrightarrow g*g(t) = \frac{2\pi}{a} \frac{1}{4a^2+t^2} \,.$$

Aufgabe 5: *(7 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix}.$$

Da die erste der drei Determinaten in der unteren Zeile zwei Nullen enthält, geht es warscheinlich am schnellsten, wenn wir sie nach Sarrus entwickeln; wir erhalten

$$(-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 - 2(1-\lambda) = \lambda(1-\lambda^2) + 2 - 2 + 2\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda\,;$$

multipliziert mit $(2-\lambda)$ wird dies zu $\lambda^4 - 2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 6\lambda$.
Die zweite Determinante vereinfacht sich durch Addition der ersten Spalte zur zweiten:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1+\lambda-4) = -\lambda^2+3\lambda\,.$$

Für die dritte Determinante schließlich ist wohl wieder Sarrus die beste Wahl und liefert den Wert $1 + 2\lambda(1-\lambda) - (1-\lambda) = -2\lambda^2 + 3\lambda$.
Insgesamt ist das charakteristische Polynom somit

$$(\lambda^4 - 2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 6\lambda) - (-\lambda^2 + 3\lambda) - (-2\lambda^2 + 3\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 = \lambda^3(\lambda - 2)\,.$$

Es gibt also die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$. Null hat die algebraische Vielfachheit drei, zwei hat die algebraische und somit auch geometrische Vielfachheit eins.
Zur Berechnung der geometrischen Vielfachheit von $\lambda_1 = 0$ müssen wir den Rang der Matrix A berechnen oder, im Hinblick auf die weiteren Aufgabenteile, am besten gleich eine Basis des Untervektorraums der von A anullierten Vektoren.
Wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - y + z - 2w &= 0 \\ x \qquad\qquad - w &= 0 \\ -y + z \qquad &= 0 \\ x - 2y + 2z - w &= 0 \end{aligned}$$

Die zweite und die dritte Gleichung zeigen, daß $y = z$ und $x = w$ sein muß; alsdann sind auch die erste und die zweite Gleichung erfüllt. Also haben wir nur einen zweidimensionalen Lösungsraum und damit nur geometrische Vielfachheit zwei. Eine Basis des Eigenraums bilden beispielsweise die Vektoren

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Lösung: *Nein,* denn die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts Null ist kleiner als die algebraische.

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt Δ?

Lösung: Um eine Basis von $\mathbb{R}^4$ zu finden, bezüglich derer die Matrix Dreiecksgestalt hat, brauchen wir zunächst noch einen Hauptvektor zweiter Stufe zu $\lambda_1 = 0$. Da

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist, muß die Summe der ersten Komponenten eines Lösungsvektors gleich der Summe der letzten beiden sein. Dies ist natürlich auch bei $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ der Fall; ein davon linear unabhängiger dritter Vektor mit dieser Eigenschaft ist z.B.

$$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } A\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.h. $A\vec{b}_3 = 2\vec{b}_1 + 6\vec{b}_2$. Zur vollständigen Basis fehlt noch ein Eigenvektor zum Eigenwert zwei. Hier erhalten wir das Gleichungssystem

$$-y + z + 2w = 0, \quad x - 2y - w = 0, \quad -y - z = 0 \quad \text{und} \quad x - 2y + 2z - 3w = 0\,.$$

Die dritte Gleichung zeigt, daß $z = -y$ sein muß; dies in die erste Gleichung eingesetzt ergibt $2w = -y + z = -2y$, also auch $w = -y$. Damit wird die zweite Gleichung zu $x - 2y + y = 0$, also $x = y$, und da wir einen Eigenvektor haben, muß damit auch die vierte Gleichung erfüllt sein, was man zur Vorsicht und zum Schutz gegen Rechenfehler überprüfen sollte.

Für den Basisvektor $\vec{b}_4$ bietet sich die Wahl $y = 1$ an, d.h. $\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bezüglich der Basis aus den Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ hat A somit die Dreiecksgestalt

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) Läßt sich auch eine Orthonormalbasis finden, bezüglich derer A Dreiecksgestalt hat?

Lösung: Die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ und $\vec{b}_4$ sind bereits orthogonal zueinander; normiert man sie auf Länge eins, erhält man so eine Orthonormalbasis.

(Eine schönere erhielte man freilich, wenn alle vier der obigen Vektoren dieselbe ganzzahlige Länge hätten. Dies könnte man beispielsweise erreichen, indem man anstelle von $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ die beiden Vektoren $\vec{b}_1 + \vec{b}_2$ und $\vec{b}_1 - \vec{b}_2$ betrachtet: Die haben, genau wie $\vec{b}_3$ und $\vec{b}_4$, die Länge zwei.)

e) Berechnen Sie die Matrizen $e^{\Delta t}$ und e^{At}! *Hinweis:* Was wissen Sie über Matrizen, deren Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis bilden? Was gilt bei Orthogonalbasen?

Lösung: Wir schreiben

$$\Delta = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

offensichtlich ist N^2 die Nullmatrix. Da nach der allgemeinen Theorie (und wie man auch trivialerweise sieht) $DN = ND$ ist, folgt $e^{\Delta t} = e^{Dt}e^{Nt} = e^{Dt}(E + Nt)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 6t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 6t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2e^t \end{pmatrix}.$$

Mit der Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ist $e^{At} = Be^{\Delta t}B^{-1}$; wir brauchen also B^{-1}.

Das kann man entweder mit dem GAUSS-Algorithmus bestimmen, oder aber sich daran erinnern, daß für eine Matrix, deren Spalten eine Orthonormalbasis bilden, die inverse Matrix einfach gleich der transponierten ist. Wir haben nur eine Orthogonalbasis; hier ist

$$B \cdot {}^tB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

gleich der Diagonalmatrix mit den Längen der Basisvektoren in der Diagonale. Das reicht auch schon zur Berechnung der Inversen, denn multiplizieren wir obige Gleichung von rechts mit der Inversen der Diagonalmatrix, folgt

$$B^{-1} = {}^tB \begin{pmatrix} \frac12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac14 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}{}^tB \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac14 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das elementare, aber unangenehme Ausmultiplizieren ergibt schließlich

$$e^{At} = \frac14 \begin{pmatrix} 3 + e^{2t} + 6t & e^{2t} - 1 - 6t & -e^{2t} + 1 + 6t & -e^{2t} + 1 - 6t \\ e^{2t} - 1 + 2t & 3 + e^{2t} - 2t & -e^{2t} + 1 + 2t & -e^{2t} + 1 - 2t \\ -e^{2t} + 1 + 2t & -e^{2t} + 1 - 2t & 3 + e^{2t} + 2t & e^{2t} - 1 - 2t \\ -e^{2t} + 1 + 6t & -e^{2t} + 1 - 6t & e^{2t} - 1 + 6t & 3 + e^{2t} - 6t \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6: *(4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ mit den Anfangsbedingungen $\vec{y}(0) = \vec{v}$ für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Nach der allgemeinen Theorie ist $\vec{y}(t) = e^{At}\vec{v}$. Die Matrix A ist bereits eine Dreiecksmatrix in Blockgestalt, wobei in jedem einzelnen Block die Diagonaleinträge konstant sind. Schreiben wir daher

$$A = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so kommutieren D und N, d.h. $e^{At} = e^{Dt}e^{Nt}$.

Die Matrix N bildet den zweiten Basisvektor ab auf den ersten, den dritten auf die Summe von erstem und zweiten und den fünften auf den vierten; die restlichen Basisvektoren werden auf den Nullvektor abgebildet. Somit bildet N^2 den dritten Basisvektor ab auf den ersten und die restliche Basis auf den Nullvektor, und N^3 ist die Nullmatrix. Also ist

$$e^{Nt} = E + Nt + \frac{1}{2}N^2t^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & t + \frac{t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

das Produkt also

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t}t & (t + \frac{t^2}{2})e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y}(t) = e^{At}\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ (1-t)e^{-t} \\ -e^{-t} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wie verhält sich diese Lösung für $t \to \infty$?

Lösung: Da sowohl e^{-t} als auch $(1-t)e^{-t}$ und t^2e^{-t} gegen Null gehen, konvergiert der Lösungsvektor gegen den vierten Einheitsvektor des $\mathbb{R}^5$.

c) Ist dieses Verhalten stabil gegenüber kleinen Veränderungen der Anfangsbedingungen?

Lösung: Nein; ersetzt man die Null in der letzten Komponente von $\vec{v}$ durch ε, wird die vierte Komponente der Lösung zu $1 + \varepsilon t$, was für $t \to \infty$ im Fall $\varepsilon > 0$ gegen $+\infty$ und im Fall $\varepsilon < 0$ gegen $-\infty$ geht.

Aufgabe 7: *(7 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + y(t) = 5e^{-t}\sin t$!

Lösung: Die homogene Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + y(t) = 0$ ist uns wohlvertraut; ihre Lösungen sind genau die sämtlichen Linearkombinationen von $\sin t$ und $\cos t$.

Als nächstes brauchen wir mindestens eine Lösung der inhomogenen Gleichung; da rechts eine gedämpfte Schwingung steht, hat ein Ansatz der Form $y(t) = e^{-t}(a\cos t + b\sin t)$ vielleicht Aussicht auf Erfolg. Hier ist

$$\dot{y}(t) = e^{-t}(-a\sin t + b\cos t) - e^{-t}(a\cos t + b\sin t) = e^{-t}\big((b-a)\cos t - (a+b)\sin t\big)$$

und damit

$$\ddot{y}(t) = e^{-t}\Big(\big(-(a+b)-(b-a)\big)\cos t - \big((b-a)-(a+b)\big)\sin t\Big) = e^{-t}\big(-2b\cos t + 2a\sin t\big).$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung ergibt

$$e^{-t}\big((a-2b)\cos t + (2a+b)\sin t\big) = 5e^{-t}\sin t\,;$$

a und b müssen also das lineare Gleichungssystem

$$a-2b=0 \quad\text{und}\quad 2a+b=5 \quad\Longleftrightarrow\quad b=1 \quad\text{und}\quad a=2$$

erfüllen. Die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung ist somit

$$y(t) = c\cos t + d\sin t + e^{-t}(2\cos t + \sin t)\,.$$

b) Berechnen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t)^2 - \beta x(t)y(t), \quad \dot{y}(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t), \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta > 0\,,$$

und bestimmen Sie deren Stabilitätsverhalten!

Lösung: Das System hat die Form $\binom{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)} = \vec{F}\big(x(t),y(t)\big)$ mit $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix}\alpha x^2-\beta xy\\ -\gamma y+\delta xy\end{pmatrix}$.
Die Gleichgewichtspunkte sind genau diejenigen Punkte, die von $\vec{F}$ auf den Nullvektor abgebildet werden, d.h. dort ist $x(\alpha x-\beta y)=0$ und $y(\delta x-\gamma)=0$. Eine offensichtliche Lösung ist $x=y=0$. Ist $y\neq 0$, folgt

$$x=\frac{\gamma}{\delta} \quad\text{und}\quad y=\frac{\alpha}{\beta}x=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}\,.$$

Weitere Fixpunkte gibt es nicht, denn mit y muß auch x verschwinden.
Erste Aussagen über die Stabilität gibt die JACOBI-Matrix $J_{\vec{F}}(x,y) = \begin{pmatrix}2\alpha x-\beta y & -\beta x\\ \delta y & \delta x-\gamma\end{pmatrix}$.
$J_{\vec{F}}(0,0) = \begin{pmatrix}0&0\\0&-\gamma\end{pmatrix}$ hat einen negativen Eigenwert und einen Eigenwert 0, in y-Richtung werden Störungen also weggedämpft. Über die x-Richtung kann uns die JACOBI-Matrix nicht sagen, aber setzen wir $y(t)\equiv 0$ in die Differentialgleichung ein, erhalten wir $\dot{x}(t) = \alpha x(t)^2$, d.h. $x(t)$ entfernt sich sogar mit überexponentiellem Wachstum von $(0,0)$, falls wir x stören. Dies zeigt die Instabilität des Fixpunkts.
Im zweiten Fixpunkt ist

$$J_{\vec{F}} = \begin{pmatrix}2\frac{\alpha\gamma}{\delta}-\frac{\alpha\gamma}{\delta} & -\frac{\beta\gamma}{\delta}\\ \frac{\alpha\gamma}{\beta} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\alpha\gamma}{\delta} & -\frac{\beta\gamma}{\delta}\\ \frac{\alpha\gamma}{\beta} & 0\end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{vmatrix}\frac{\alpha\gamma}{\delta}-\lambda & -\frac{\beta\gamma}{\delta}\\ \frac{\alpha\gamma}{\beta} & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda\Big(\lambda-\frac{\alpha\gamma}{\delta}\Big)+\frac{\alpha\gamma^2}{\delta} = \Big(\lambda-\frac{\alpha\gamma}{2\delta}\Big)^2+\frac{\alpha\gamma^2}{\delta}-\Big(\frac{\alpha\gamma}{2\delta}\Big)^2,$$

die Eigenwerte also $\lambda_{1,2} = \frac{\alpha\gamma}{2\delta}\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha\gamma}{2\delta}\right)^2-\frac{\alpha\gamma^2}{\delta}}$. Für $\alpha<4\delta-1$ haben wir zwei konjugiert komplexe Eigenwerte mit positivem Realteil, das System entfernt sich also spiralförmig vom Fixpunkt. Für $\alpha\geq 4\delta-1$ sind die Eigenwerte reell, und mindestens einer ist positiv. In keinem Fall ist der Fixpunkt also stabil.

Aufgabe 8: (*5 Punkte*)

a) Zeigen Sie: Für jede stetige Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist $\mathcal{L}\Big\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\Big\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$!

Lösung: Sei $F(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$. Dann ist

$$\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}(s) = \mathcal{L}\big\{\dot{F}(t)\big\}(s) = s\mathcal{L}\big\{F(t)\big\}(s) - F(0) = s\mathcal{L}\big\{F(t)\big\}(s)\,.$$

Division durch s ergibt die Behauptung.

b) $S_k(t) = \sum\limits_{j=0}^{k-1}(-1)^j\dfrac{t^{2j+1}}{(2j+1)!}$ und $C_k(t) = \sum\limits_{j=0}^{k-1}(-1)^j\dfrac{t^{2j}}{(2j)!}$ seien die TAYLOR-Polynome von Sinus und Kosinus vom Grad $2k-1$ *bzw.* $2k-2$. Zeigen Sie:

$$\mathcal{L}\{C_k(t) + (-1)^k\cos t\} = \frac{1}{(s^2+1)s^{2k-1}} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{S_k(t) + (-1)^k\sin t\} = \frac{1}{(s^2+1)s^{2k}}\,.$$

Lösung: Man könnte hier wohl auch direkt mit Partialbruchzerlegungen arbeiten, aber wahrscheinlich ist ein Beweis durch Induktion nach dem Grad der s-Potenz im Nenner einfacher:
Für Grad Null haben wir die wohlbekannte Formel $\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$.
Für positivem Grad folgt die Behauptung aus *a),* da $C_k(t) + (-1)^k\cos t$ Stammfunktion von $S_k(t)+(-1)^k\sin t$ ist und $S_k(t)+(-1)^k\sin t$ Stammfunktion von $C_{k+1}+(-1)^{k+1}\cos t$. Das es sich jeweils um das Integral mit unterer Grenze Null handelt ist klar, da die Funktionen jeweils Sinus *bzw.* Kosinus ohne die ersten Terme der TAYLOR-Reihe sind, wobei der Kosinus selbst nicht vorkommt.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y^{(4)}(t) + 4y^{(3)}(t) + 6\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + y(t) = 2e^{-t}\cos t$ mit $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = y^{(3)}(0) = 0$!

Lösung: Das ist ein reines Anfangswertproblem; für so etwas ist meist ein Ansatz via LAPLACE-Transformation gut geeignet. Für die LAPLACE-Transformierte $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ der Lösungsfunktion gilt

$$(s^4+4s^3+6s^2+4s+1)Y(s) = \mathcal{L}\{2e^{-t}\cos t\}(s) = 2\mathcal{L}\{\cos t\}(s+1) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1}\,.$$

Da $(s^4+4s^3+6s^2+4s+1) = (s+1)^4$ ist, folgt

$$Y(s) = \frac{2(s+1)}{\big((s+1)^2+1\big)(s+1)^4} = \frac{2}{\big((s+1)^2+1\big)(s+1)^3} \quad \text{und} \quad X(s) = Y(s-1) = \frac{2}{(s^2+1)s^3}\,.$$

Nach *b)* ist letzteres die LAPLACE-Transformierte von

$$2(C_2(t) + \cos t) = 2\left(1 - \frac{t^2}{2} + \cos t\right) = 2 - t^2 + \cos t\,.$$

Multiplizieren wir diese Funktion mit e^{-t}, ist die LAPLACE-Transformation des Produkts $X(s+1) = Y(s)$, die gesuchte Lösungsfunktion ist also $y(t) = (\cos t - t^2 + 2)e^{-t}$.