

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27. Januar 2005

- a) Bestimmen Sie die sämtlichen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen und diskutieren Sie deren Langzeitverhalten!

$$\begin{array}{ll} \dot{y}(t) + 2ty(t) = 4t & (1) \\ \dot{y}(t) = a + bt + cy(t) & (3) \\ \dot{y}(t) + y(t) = 2 \sin t & (5) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \dot{y}(t) + \frac{y(t)}{t} + e^t = 0 & (2) \\ (1+t)\dot{y}(t) + y(t) + t^2 + t^3 = 0 & (4) \\ \dot{y}(t) + \sin t y(t) = \sin^3 t & (6) \end{array}$$

- b) Welche der folgenden Anfangswertprobleme sind eindeutig lösbar?

$$\begin{array}{ll} \dot{y}(t) = \cos y(t) & \text{mit } y(0) = 0 & (1) \\ 2\dot{y}(t)y(t) = 1 & \text{mit } y(0) = 0 & (2) \\ \dot{y}(t) = \frac{5}{3}y(t)^{\frac{2}{5}} & \text{mit } y(0) = 0 & (3) \\ \dot{y}(t) = \frac{\sin t \cdot \cos y(t)}{1+t^8} & \text{mit } y(0) = 1 & (4) \\ \dot{y}(t)^2 = 4y(t) & \text{mit } y(0) = 0 & (5) \\ \dot{y}(t) = \frac{1}{y(t)} & \text{mit } y(0) = 1 & (6) \end{array}$$

- c) Finden Sie die allgemeine reelle Lösung der folgenden Differentialgleichungen, und überlegen Sie sich, wo  $t$  liegen muß, damit diese Lösungen existieren:

$$\begin{array}{lll} \dot{y}(t) = \frac{t^2}{e^{y(t)}} & (1) & \dot{y}(t) = \frac{e^t}{y(t)^2} & (2) & \dot{y}(t) = e^{t+y(t)} & (3) \\ \dot{y}(t) = t^2 y(t)^2 & (4) & \dot{y}(t) = \frac{t^2}{y(t)^2} & (5) & \dot{y}(t) = \frac{1+y(t)^2}{1+t^2} & (6) \end{array}$$

*Hinweis zu (6):*  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

- d) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils an, wo die Lösungen existieren:

$$\begin{array}{ll} \dot{y}(t) = \frac{t}{y(t)} & \text{mit } y(0) = 3 & (1) \\ \dot{y}(t) = \frac{t}{y(t)} & \text{mit } y(0) = -3 & (2) \\ \dot{y}(t) = \sin^2 t \cdot \cos^2 y(t) & \text{mit } y(0) = \frac{\pi}{4} & (3) \\ \dot{y}(t) = 1 + y(t)^2 & \text{mit } y(0) = 0 & (4) \\ \dot{y}(t) = 1 + y(t)^2 & \text{mit } y(0) = 1 & (5) \\ y(t) \dot{y}(t) + (1 + y(t)^2) \sin t = 0 & \text{mit } y(0) = 1 & (6) \end{array}$$

- e) 1960 wurde anhand der damals vorliegenden Daten (von drei amerikanischen Elektrotechnikern) vorgeschlagen, daß die Weltbevölkerung  $N(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  gemäß dem Gesetz  $\dot{N}(t) = aN(t)^b$  wachsen sollte mit  $a > 0$  und  $b > 1$ . Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung!
- f) Diskutieren Sie das qualitative Verhalten der Lösungsfunktionen!
- g) Welche Bedingung muß die Integrationskonstante  $C$  mindestens erfüllen, falls diese Gleichung für den gegenwärtigen Zeitpunkt ein realistisches Modell sein sollte?